

Diseño de filtros discretos

José Antonio Morán Moreno
Joan Claudi Socoró Carrié

PID_00175661



Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 España de Creative Commons. Podéis copiarlos, distribuirlos y transmitirlos públicamente siempre que citéis el autor y la fuente (FUOC. Fundació para la Universitat Oberta de Catalunya), no hagáis de ellos un uso comercial y ni obra derivada. La licencia completa se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.es>

Índice

1. Introducción a los filtros discretos.....	5
1.1. Estudio de un filtro paso-bajo ideal	5
1.2. Especificaciones y plantillas prototipo	8
1.3. Caracterización de SLIT con la TZ	10
1.4. Filtros reales	12
1.5. Filtros FIR	13
1.6. Filtros IIR	14
1.7. Interpretación del diagrama de polos y ceros	14
1.7.1. Estabilidad	18
1.7.2. Causalidad	19
1.8. Retardo de grupo y sistemas de fase mínima	20
1.9. Filtros FIR de fase lineal	21
1.10. Inversión de sistemas	24
1.10.1. Procedimiento general	25
1.10.2. Celdas pasa-todo e inversión de sistemas de fase no mínima	25
2. Diseño de filtros FIR con el método de las ventanas.....	29
2.1. Análisis de algunas ventanas típicas	31
2.2. Ejemplo de diseño	32
2.3. Método de la ventana Kaiser	36
3. Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos.....	42
3.1. Diseño analógico frente a diseño discreto	42
3.2. Transformación bilineal	46
3.2.1. Estudio del mapeo entre los planos s y z y en los dominios de la frecuencia analógico y discreto	47
3.2.2. Elección del parámetro T_s y transformación de especificaciones	48
3.3. Filtros analógicos	51
3.3.1. Filtro de Butterworth	52
3.3.2. Filtro de Chebyshev tipo I	55
3.4. Transformaciones de frecuencia	60
3.4.1. Transformaciones en frecuencia en el dominio discreto	61
Actividades.....	67
Abreviaturas.....	72
Anexo.....	73

1. Introducción a los filtros discretos

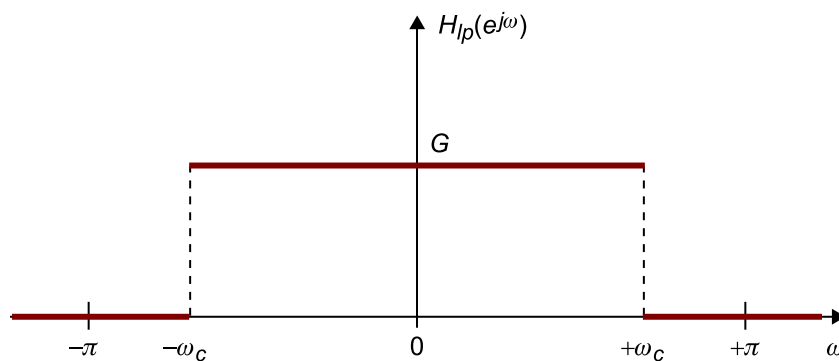
En este apartado introduciremos el diseño de filtros de tiempo discreto, y trataremos aspectos básicos, tales como la definición de especificaciones, el tipo de estructuras y de filtros, la interpretación del diagrama de polos y ceros sobre el comportamiento del filtro, el retardo de grupo, los sistemas de fase mínima, los filtros de fase lineal y la inversión de sistemas mediante filtros. El objetivo principal es realizar un repaso a conceptos básicos que nos situarán en la problemática del proceso de diseño, mientras que otros conceptos son requisitos necesarios para poder afrontar la etapa de diseño con garantías de éxito. Se tratará principalmente el análisis de filtros selectivos en frecuencia (prototipos paso-bajo, paso-alto, elimina-banda o rechazo-banda) aunque también se verán conceptos más relacionados con el diseño de filtros específicos para un problema dado (inversión de sistemas).

1.1. Estudio de un filtro paso-bajo ideal

A continuación, analicemos un sencillo filtro discreto paso-bajo ideal. Para empezar, definimos como parámetros del filtro su pulsación discreta de corte, expresada como ω_c en unidades de radianes por muestra (valor que estará acotado entre los valores $0 < \omega_c < \pi$), y su ganancia, expresada como G en lineal¹ (parámetro real y positivo), y podemos dibujar la función de transferencia del filtro en el dominio de Fourier, $H_{lp}(e^{j\omega})$, como sigue:

⁽¹⁾Podemos pasar el valor de esta ganancia a unidades de dB realizando el cálculo $20 \log_{10} G$.

Figura 1. Función de transferencia de un filtro paso-bajo ideal



Analizando con un poco más de detalle la respuesta frecuencial de este filtro, podemos decir que posee una banda de paso perfectamente plana, que la transición de la banda de paso hacia la banda de rechazo es instantánea, y que asimismo, la banda de rechazo es también plana y con ganancia igual a 0 (pasado a dB sería un rechazo de $-\infty$). Recordemos que dado que estamos trabajando en el dominio de las señales y los sistemas discretos en el tiempo, la

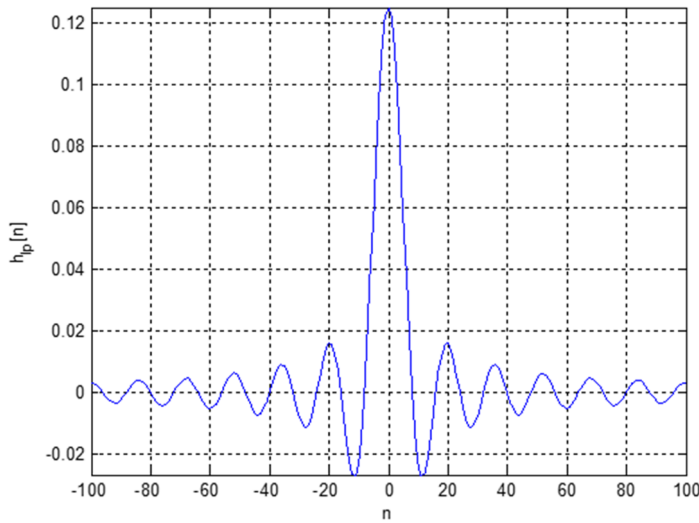
representación en frecuencia de estos conlleva una periodicidad de periodo 2π radianes por muestra, por lo que únicamente debemos fijarnos en un periodo de dicha representación.

A continuación, calculamos la respuesta impulsional de este filtro paso-bajo ideal, aplicando la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier para señales discretas y realizando el cálculo integral directo:

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_{lp}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} G e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{G e^{j\omega n}}{jn} \Big|_{-\omega_c}^{+\omega_c} = \frac{G}{n\pi} \frac{(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n})}{2j} = \frac{G}{n\pi} \text{sen}(\omega_c n) \end{aligned}$$

Como vemos este filtro tiene una respuesta impulsional infinita, ya que es una función *sinc* discreta, con el máximo ubicado en $n=0$ y con un decrecimiento a razón de $\frac{1}{n}$ para valores crecientes o bien decrecientes de n . Esto se puede apreciar en la siguiente figura:

Figura 2. Respuesta impulsional de un filtro paso-bajo ideal con parámetros frecuencia de corte $\omega_c = \pi/8$ rad/muestra y ganancia $G = 1$



Nota: Se muestran únicamente las 201 muestras alrededor de la muestra central $n = 0$.

A continuación, estamos en condiciones de poder realizar un par de observaciones que nos permitirán entender los compromisos que habitualmente debemos atender en la tarea del diseño de un filtro discreto (de este modo, ya estaremos en disposición de analizar con mayor detalle técnicas para el diseño de filtros de tiempo discreto):

- Se trata de un filtro no causal, dado que la respuesta impulsional del filtro posee valores no nulos para $n < 0$.
- La respuesta impulsional es infinita y simétrica par alrededor de $n = 0$.

La primera observación nos lleva a entender que se trata de un filtro no realizable cuando hablamos de filtros que operan en el dominio temporal², lo que implica que, para el caso de filtros sí realizables, deberemos cumplir de forma estricta la condición de causalidad. La segunda observación nos indica también una característica que conlleva el no poder llevar a la práctica el proceso de filtrado usando la operación de convolución, dado que si la respuesta impulsional es infinita, esto significaría que para cada muestra de la señal de salida se debería realizar un infinito número de operaciones aritméticas. Recordemos que, según la teoría de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLIT), la salida se puede calcular mediante la ecuación de convolución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

Vemos que en el caso de que la respuesta impulsional del sistema $h[n]$ sea infinita, se requiere de una suma de infinitos productos de muestras de esta por la señal de entrada.

Así pues, de todo lo dicho hasta ahora podemos resumir que **un filtro ideal paso-bajo no es realizable**, por lo que deberemos forzar, para dar luz a la realización de un filtro paso-bajo realizable, que este sea un filtro causal y de complejidad computacional finita. La idealidad del filtro planteado conlleva una forma perfectamente rectangular en el dominio frecuencial, es decir, una selección frecuencial perfecta del conjunto de frecuencias que el filtro debería seleccionar. Esto, asimismo, conlleva que en el dominio temporal se trate de un filtro con infinitud temporal, dado que se cumple el principio de incertidumbre tiempo-frecuencia: una señal muy localizada en el dominio frecuencial produce una señal muy deslocalizada en el dominio temporal. Si pensamos en el caso extremo, llegamos al caso de una señal sinusoidal de pulsación discreta ω_0 , dado que esta presenta una forma temporal periódica pero infinita en el dominio temporal, mientras que en el dominio de la frecuencia, esta se halla perfectamente localizada en un par de pulsaciones discretas $\pm\omega_0$.

En el siguiente apartado veremos el análisis de los sistemas lineales e invariantes gobernados mediante una **ecuación lineal en diferencias finitas y coeficientes constantes**. Este tipo de sistemas se puede entender como un subconjunto de los posibles SLIT realizables, es decir, que son causales y que poseen una complejidad de cálculo asumible mediante una computadora. Más adelante veremos cómo en función de la tipología de filtro, bien sean de respuesta impulsional finita (FIR) o de respuesta impulsional infinita (IIR), este tipo de estructuras nos permiten llegar a diseños que en dominio frecuencial presentarán imperfecciones, sin bandas de paso ni de rechazo perfectamente planas, ni con bandas de transición perfectamente instantáneas. Estas imperfecciones que aparecen al comparar los filtros reales con sus respectivos ideales son consecuencia directa de forzar las condiciones antes enunciadas, y nos obligarán a establecer unos requisitos mínimos para que el diseño que se desea obtener

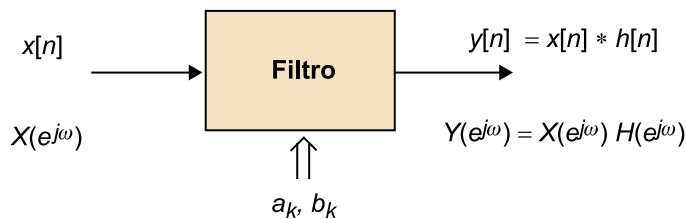
⁽²⁾Los filtros no causales sí tienen sentido en otros dominios, como puede ser el caso del procesamiento digital de imagen, donde las variables son posiciones espaciales, en vez de temporales.

cumpla las expectativas de éxito para el propósito con que los queremos diseñar, esto es, la función que estos van a desempeñar en un problema concreto de procesamiento digital de la señal. A estos requisitos los denominaremos **especificaciones de diseño**, y englobarán condiciones adicionales a las frecuencias de corte o ganancias que queremos conseguir, tales como atenuaciones mínimas en las bandas de rechazo y pulsaciones de corte a partir de donde este rechazo mínimo se deberá cumplir.

1.2. Especificaciones y plantillas prototipo

Visto el análisis de un filtro paso-bajo ideal y entendidos los compromisos y limitaciones que un diseño real comporta, vamos a hablar de las especificaciones que se fijan para el diseño de un filtro digital y veremos también las plantillas prototipo que habitualmente manejamos cuando diseñamos filtros para la tarea de seleccionar un subconjunto de frecuencias (filtros selectivos en frecuencia).

Figura 3. Configuración del filtro digital a partir de los coeficientes a_k y b_k y comportamiento temporal (convolución entrada por respuesta impulsional) y frecuencial (multiplicación de transformada de Fourier de la entrada por la función de transferencia del filtro)

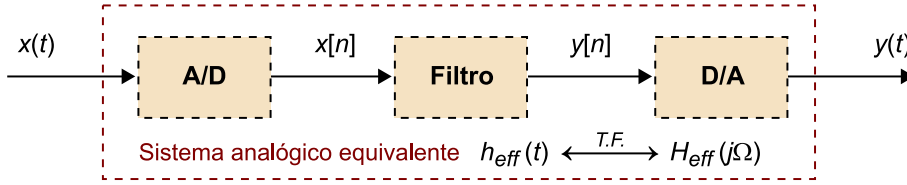


En primer lugar, como se aprecia en la figura 3, conviene entender que el diseño de un filtro discreto implica el diseño de sus coeficientes asociados a la ecuación lineal en diferencias finitas y coeficientes constantes. En función de estos, el comportamiento del filtro será uno u otro, provocando las modificaciones desde los puntos de vista temporal (se produce una convolución entre la señal de entrada y la respuesta impulsional del filtro) y frecuencial (se produce un producto entre la transformada de Fourier de la secuencia de entrada y la respuesta frecuencial del filtro).

Por otro lado, no hay que perder de vista que el uso de los filtros discretos se enmarca habitualmente en un contexto de procesamiento de señales analógicas (ver figura 4), mediante el uso de conversores analógico a digital (o A/D) y digital a analógico (o D/A). Aunque este procesamiento puede realizarse en diferido (es decir, la señal muestreada se graba para ser luego procesada y, finalmente, una vez procesada se vuelve a convertir a una señal analógica) este es a menudo hecho en tiempo real. Esto se produce cuando tanto la señal de entrada como la señal de salida no tienen una duración fija y deben producirse de forma simultánea (por ejemplo, en un sistema de sonorización acústica la señal de entrada proviene de micrófonos y la de salida irá hacia los altavoces),

lo que implica que el procesamiento debe realizarse por bloques, de modo que cada bloque de muestras de entrada pueda ser procesado en un tiempo inferior a la duración del bloque.

Figura 4. Cadena de procesado en tiempo real. Comportamiento del sistema como un sistema analógico equivalente



En cualquier caso, la tarea encomendada a un filtro digital debe ser especificada teniendo en cuenta la frecuencia de muestreo usada (f_s muestras por segundo o $T_s = 1/f_s$ segundos por muestra) en la etapa de conversión tanto analógico-digital como digital-analógica (habitualmente con la misma frecuencia asociada). Si se analiza con detenimiento el esquema de la figura 4, y se menosprecia el efecto de cuantificación de la señal en la conversión analógico-digital, se pueden establecer las siguientes relaciones entre las respuestas frecuenciales del sistema discreto o filtro digital, $H(e^{j\omega})$, y el correspondiente sistema analógico equivalente formado por la cadena conversor A/D-filtro digital-conversor D/A, $H_{eff}(j\Omega)$:

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| \leq \pi/T_s \\ 0 & |\Omega| > \pi/T_s \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) \quad |\omega| < \pi$$

Las identidades anteriores se establecen a partir del hecho de que la transformada de Fourier de una secuencia discreta, obtenida como el muestreo uniforme en el tiempo de una señal analógica a T_s segundos por muestra, es igual a la normalización en amplitud (por el factor $1/T_s$) y en frecuencia (por el factor T_s) de la repetición periódica de la transformada de Fourier de la señal analógica de la cual esta proviene. Cuando consideramos el sistema completo, hay que tener en cuenta que el factor de normalización de amplitud desaparece en el proceso de reconstrucción (conversión D/A), mientras que la normalización de frecuencias es necesaria para convertir especificaciones de un dominio analógico a un dominio discreto.

Como se puede apreciar, el sistema analógico equivalente tiene un comportamiento en frecuencia que queda establecido por la respuesta en frecuencia propia del filtro digital, aplicando una desnormalización del eje de frecuencias.

Ejemplo

Si se diseña un filtro digital paso-bajo con pulsación de corte $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ radianes/muestra, y ganancia $G = 2$ en la banda de paso, y suponiendo que la frecuencia de muestreo de la

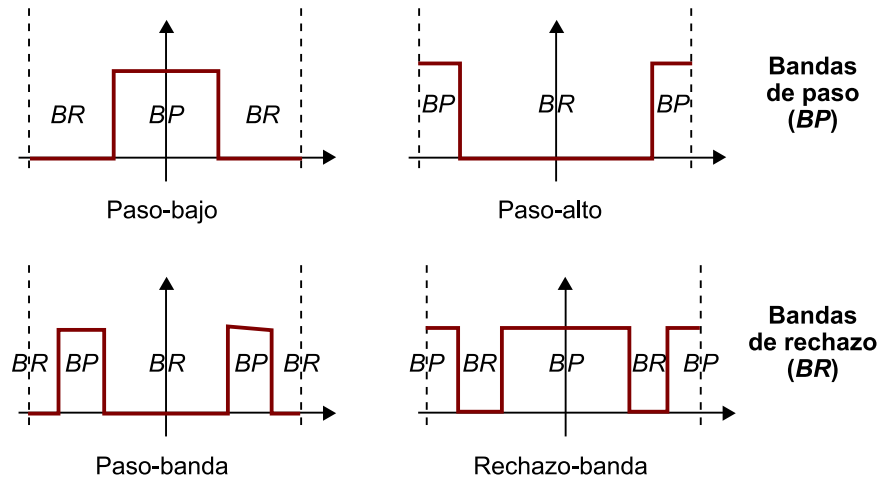
señal es de $f_s = 8000$ Hz, llegamos a la conclusión de que el sistema analógico equivalente tendrá una función de transferencia igual a:

$$H_{ef}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\frac{\Omega}{f_s}}) & |\Omega| \leq \pi f_s \\ 0 & |\Omega| > \pi f_s \end{cases} = \begin{cases} G & |\Omega| \leq \omega_c f_s \\ 0 & |\Omega| > \omega_c f_s \end{cases} = \begin{cases} 2 & |\Omega| \leq 2\pi \times 1.000 \\ 0 & |\Omega| > 2\pi \times 1.000 \end{cases}$$

Es decir, la ganancia del filtro analógico equivalente es de 2, y la frecuencia de corte es de 1000 Hz, o en radianes por segundo $\Omega_c = \omega_c f_s = 2.000\pi$.

La definición de especificaciones de un filtro discreto es a menudo realizada en el contexto de filtros selectivos en frecuencia, esto es, filtros que dejan pasar ciertas regiones de frecuencias y rechazan el resto. En este ámbito, se definen cuatro tipos de **plantillas de especificaciones** según se requiera el diseño de filtros paso-bajo, filtros paso-alto, filtros paso-banda y filtros rechazo-banda, tal y como se aprecia en la figura 5. Cabe recordar que en el dominio de Fourier de las señales y los sistemas discretos, las frecuencias bajas se hallan alrededor de la pulsación discreta $\omega = 0$ rad/muestras, mientras que las altas frecuencias están alrededor de $\omega = \pi$ rad/muestra, siendo estas últimas equivalentes a las frecuencias analógicas centradas alrededor de $f = f_s/2$ Hz, lo que es la frecuencia de Nyquist. La banda de frecuencias medias estarán, por lo tanto, en el margen de frecuencias entre estos dos conjuntos de valores.

Figura 5. Funciones de transferencia $H(e^{j\omega})$ de las plantillas prototipo paso-bajo (izquierda superior), paso-alto (derecha superior), paso-banda (inferior izquierda) y rechazo-banda (inferior derecha)



1.3. Caracterización de SLIT con la TZ

Tal y como hemos visto, la respuesta de un filtro ideal (p. ej., filtro paso-bajo con transición abrupta y bandas de paso y atenuadas planas o constantes) es una secuencia de duración infinita y no causal. La implementación de filtros con un coste computacional finito podemos conseguirla utilizando las ecuaciones lineales en diferencias finitas y con coeficientes constantes. Con estas ecuaciones y diseñando los coeficientes de forma adecuada, podemos conseguir realizar aproximaciones al filtro ideal con un coste computacional acotado.

El estudio de la transformada Z y su relación con las ecuaciones en diferencias nos servirá de marco para poder analizar el comportamiento de sistemas discretos y relacionarlo con la TFSD (transformada de Fourier para secuencias discretas). Si recordamos la expresión de una ecuación en diferencias con coeficientes constantes, tenemos la siguiente ecuación:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Que se corresponde a la relación entrada-salida del esquema de la figura 6.

En principio, y si no se indica lo contrario, asumiremos que el sistema es causal y, por lo tanto, la solución de esta ecuación en diferencias será una secuencia orientada a la derecha (que vale cero para $n < 0$). Aplicando la definición de la transformada Z a la ecuación temporal, las propiedades de linealidad y de desplazamiento temporal de esta y transformando ambas partes de la expresión llegamos a la siguiente expresión:

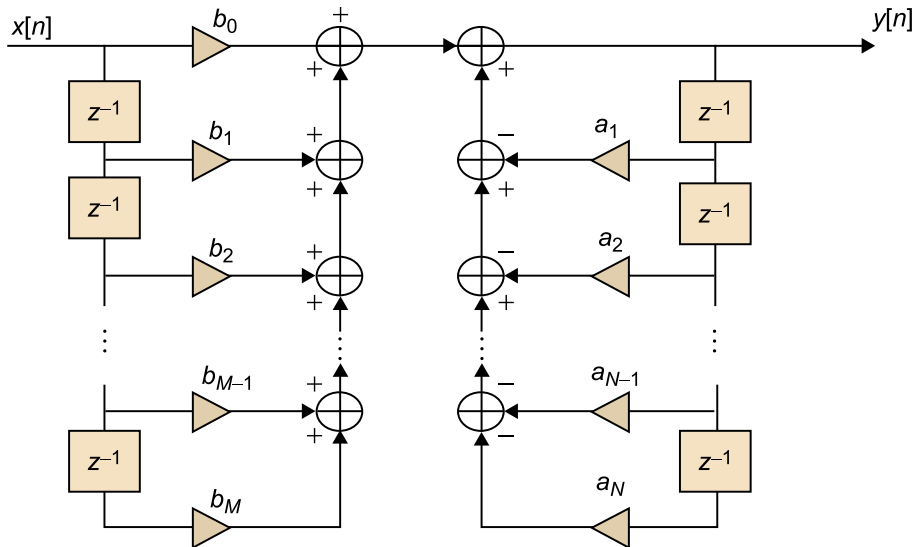
$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z) \cdot z^{-k}$$

Trabajando sobre la expresión anterior, podemos llegar a la siguiente ecuación para determinar la **función de transferencia** del sistema:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Esta expresión nos permite hacer una descripción de la posición de los **polos** y **ceros** del sistema y nos permitirá inferir el comportamiento del sistema en función de su distribución de polos y ceros en el dominio transformado.

Figura 6. Esquema genérico de un SLIT gobernado con una ecuación en diferencias finitas y coeficientes constantes



1.4. Filtros reales

Una de las condiciones habituales de diseño se centra en filtros con respuesta impulsional real (p. ej., aplicaciones de audio digital), aunque puede trabajarse también con filtros de aritmética compleja en el tiempo (p. ej., en aplicaciones del mundo de las comunicaciones digitales).

Un filtro con respuesta impulsional real cumple la propiedad de simetría conjugada en el dominio de la TFSD. Desde la perspectiva del análisis con la transformada Z esto se traduce en la propiedad que los polos y los ceros de $H(z)$ tienen todos ellos sus simétricos conjugados (siempre y cuando no sean polos o ceros reales).

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

$$H(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n](z^*)^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \right)^* = H^*(z)$$

Por ejemplo, la relación anterior deja claro que si z_0 es un cero del sistema, entonces z_0^* también lo será, dado que el valor de la función de transferencia debe de dar el mismo valor pero complejo conjugado. Lo mismo sucede para el caso de los polos del sistema, siendo en este caso un valor infinito en lugar de un valor nulo el que retorna la función.

Es decir, para diseñar filtros con respuesta impulsional real, hemos de sacrificar casi la mitad de los polos y los ceros al estar estos emparejados con sus simétricos conjugados, de forma que reducimos el número de grados de libertad disponibles para cumplir unas determinadas especificaciones de diseño.

Ejemplo

Veamos primero el caso de un filtro no real. Por ejemplo, un filtro FIR con parámetro de ganancia $G=2$, ceros $z_1=1$ y $z_2=e^{j\frac{\pi}{4}}$. Su función de transferencia y su respuesta impulsional serán:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= 2(1-z)(1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}) = 2 - 2(1+e^{j\frac{\pi}{4}})z^{-1} + e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-2} = \\ &= 2 - (3,41 + 1,41j)z^{-1} + (1,41 + 1,41j)z^{-2} \end{aligned}$$

$$h_1[n] = 2\delta[n] - (3,41 + 1,41j)\delta[n-1] + (1,41 + 1,41j)\delta[n-2]$$

A continuación, el mismo ejemplo pero añadiendo el cero simétrico conjugado de z_2 como tercer cero del filtro.

$$\begin{aligned}
 H_2(z) &= 2(1 - z^{-1})(1 - e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}) = \\
 &= 2(1 - z^{-1})(1 - (e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{4}})z^{-1} + z^{-2}) = \\
 &= 2(1 - z^{-1})(1 - 2\cos(\pi/4)z^{-1} + z^{-2}) = \\
 &= 2 - 4,828z^{-1} + 4,828z^{-2} - 2z^{-3}
 \end{aligned}$$

$$h_2[n] = 2\delta[n] - 4,828\delta[n-1] + 4,828\delta[n-2] - 2\delta[n-3]$$

Como podemos apreciar, los coeficientes de la respuesta impulsional del segundo caso en el que los ceros complejos tienen sus simétricos conjugados son valores reales, mientras que en el primer caso donde no existe dicha simetría se obtienen valores complejos.

Ejemplos similares se pueden también analizar incluyendo polos (sistemas IIR).

1.5. Filtros FIR

Si en la estructura que acabamos de ver eliminamos la realimentación de la salida, el sistema que se obtiene es el denominado filtro FIR (*finite impulse response*), ya que si su entrada es un impulso, la salida es un número limitado de muestras no nulas. Para obtener la salida solo se utilizan valores de la entrada actual y anteriores. Su ecuación en diferencias es:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

El orden del filtro es M, es decir, el número de coeficientes menos 1. Si transformamos esta expresión, tenemos:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k X(z) \cdot z^{-k} = X(z) \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M})$$

Siendo la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}$$

La respuesta impulsional del filtro es directamente la secuencia ordenada de los coeficientes del filtro:

$$h[n] = \text{T.Z.}^{-1}\{H(z)\} = b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2] + \dots + b_M\delta[n-M]$$

es decir, $b_k = h[k]$ para $0 \leq k \leq M$.

Los filtros FIR son estables puesto que solo tienen ceros. Como veremos más adelante, los filtros FIR tienen la ventaja de que pueden tener una fase lineal, por lo que su retardo de grupo puede ser constante. Esto querrá decir que se

pueden diseñar para que no introduzcan desfases en las diferentes frecuencias de la señal, lo cual será de importancia relevante sobre todo para minimizar la distorsión que el filtro pueda introducir en las bandas de paso. En general, esperamos que un filtro nos permita seleccionar ciertos rangos de frecuencia, así como desechar otros que no nos interesan. Un aspecto que nos interesará será que el filtro deje la señal lo más intacta posible en las bandas que este deja pasar (bandas de paso), por lo que interesa que el filtro tenga una baja **distorsión de fase**. Cuanto más lineal es la fase del filtro (fase o argumento de la función de transferencia con decrecimiento lineal con la frecuencia) más constante será el retardo introducido por este para las distintas frecuencias, es decir, menor distorsión de fase.

El inconveniente que presentan es que necesitan más coeficientes que los filtros IIR (que veremos a continuación) para cumplir características similares. Esto conlleva mayor tiempo de cálculo y por tanto problemas en aplicaciones a tiempo real.

1.6. Filtros IIR

El esquema completo presentado al principio de este apartado se corresponde a un filtro IIR (*infinite impulse response*). Se les denomina así porque la salida al impulso es una secuencia ilimitada de términos no nulos. Para obtener la salida se utilizan valores de la entrada actual y anteriores y, además, valores de la salida anteriores que son almacenados en memoria y realimentados.

Los filtros IIR pueden conseguir una misma respuesta en frecuencia con un número mucho menor de coeficientes que los filtros FIR, con el consiguiente ahorro de tiempo de cálculo. El principal inconveniente de los filtros IIR es que pueden llegar a ser inestables, según la posición de los polos. Además, en general los filtros IIR tienen una fase o argumento no lineal con la frecuencia, aspecto que provoca un retardo distinto para cada frecuencia de la señal (distorsión de fase no nula).

1.7. Interpretación del diagrama de polos y ceros

El diagrama de polos y ceros es una representación gráfica de una función de transferencia racional en el plano complejo, que nos ayudará a interpretar el comportamiento en frecuencia del sistema y a determinar ciertas propiedades importantes, como la **estabilidad**, **causalidad**, **ROC** (del inglés, *region of convergence*, 'región de convergencia') y **fase mínima**.

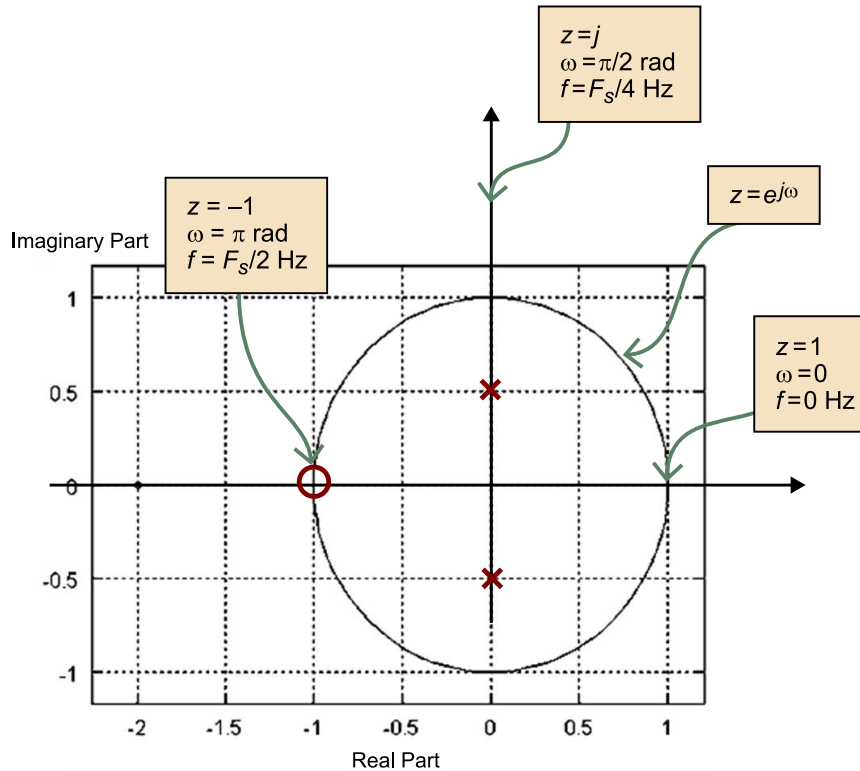
Veamos, en primer lugar, algunos ejemplos de SLIT (sistema lineal e invariante en el tiempo) analizados a partir del diagrama de polos y ceros y su representación en frecuencia.

Ejemplo

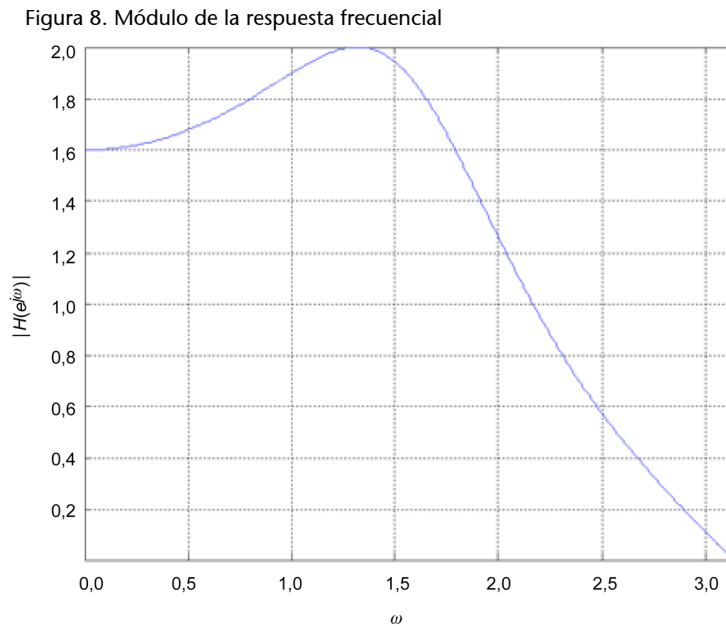
La función de transferencia siguiente tiene un cero en $z = -1$ y dos polos en $z = \pm 0,5j$. Existe otro cero (no explícito) en $z \rightarrow \infty$, ya que el orden del filtro es 2.

$$H(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)} = \frac{z+1}{z^2+\frac{1}{4}}$$

Figura 7. Diagrama de polos y ceros del ejemplo. Se indican tres puntos característicos en el círculo unidad (valor de z , valor de ω así como de frecuencia analógica equivalente)



Para interpretar el diagrama de polos y ceros, hay que tener presente que la circunferencia unidad se corresponde a $z = e^{j\omega}$, es decir, los valores de z para los cuales la transformada Z se corresponde a la TFSD. Por tanto, desde un punto de vista de la frecuencia será el lugar de mayor interés. De esta forma, los ceros situados encima de la circunferencia unidad cancelarán las frecuencias correspondientes al valor de ω (fase de la variable z). Los ceros próximos a la circunferencia unidad tendrán un efecto atenuador de las frecuencias o ángulos cercanos. En cambio, los polos cercanos al círculo unidad tendrán un efecto amplificador. Los polos no se pueden situar encima de la circunferencia unidad porque generarían una inestabilidad a esa frecuencia (la salida sería infinita). Únicamente tiene sentido diseñar sistemas con polos sobre el círculo unidad cuando se persigue conseguir osciladores digitales, pero no cuando se persigue diseñar filtros digitales estables.



Del diagrama de polos y ceros del ejemplo podemos decir que se cancelará la máxima alta frecuencia $\omega = \pi$ debido al cero ubicado en esta fase del círculo unidad, mientras que los dos polos provocarán que las frecuencias alrededor de $\omega = \pi/2$ queden amplificadas. Podemos ver todo esto en el módulo de la respuesta frecuencial del sistema representado en la figura 8. Como se puede observar se anula la frecuencia $\omega = \pi$ y se realza la frecuencia $\omega \approx \pi/2$.

Al tener los dos polos complejos con simetría conjugada se puede comprobar que se trata de un filtro con respuesta impulsional real. Esto se puede ver también en la ecuación en diferencias finitas que se puede derivar de la función de transferencia en el plano Z:

$$H(z) = \frac{(z^{-1} + z^{-2})}{(1 + \frac{1}{4}z^{-2})} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \Rightarrow \quad y[n] = x[n-1] + x[n-2] - \frac{1}{4}y[n-2]$$

Al tratarse de una ecuación temporal con coeficientes constantes reales, este filtro generará a su salida señales reales cuando tengamos señales reales en la entrada.

Ejemplo

Se quiere diseñar un filtro causal que, si la entrada proviene de muestrear una señal de audio a 16.000 Hz, tenga las siguientes especificaciones:

- Elimine la componente continua y también la frecuencia analógica de 8.000 Hz.
- Tenga un pico de máxima ganancia a la frecuencia analógica de 2.000 Hz.

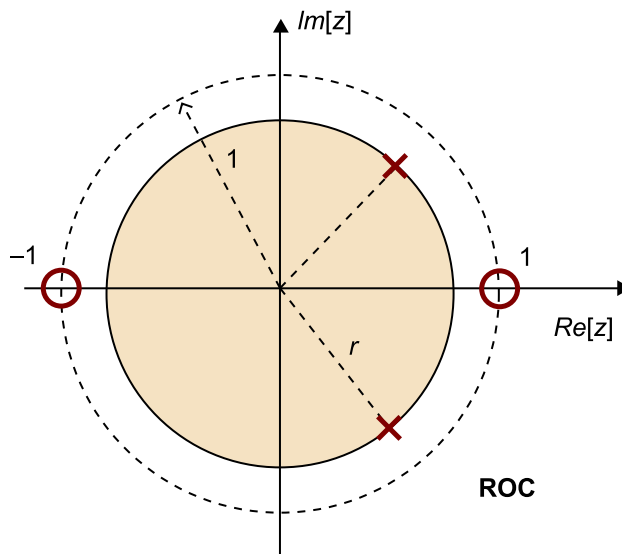
Propondremos un diagrama de polos y ceros que permita implementar el filtro y, a partir de este, determinaremos la función de transferencia $H(z)$ en función de una ganancia global y la posición de los polos y los ceros. Según las especificaciones, el diagrama de polos y ceros tendrá:

- Un cero en $z = 1 = e^{j0}$, ya que elimina la componente continua.
- Un cero en $z = -1 = e^{j\pi} = e^{j2\pi \frac{8.000}{16.000}}$, ya que elimina la alta frecuencia ($f = 8.000\text{Hz}$ con $F_s = 16.000$ muestras/s se corresponde a $\omega = \pi$).

- Los polos deben estar cerca de $z = e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ ($f = 2.000\text{Hz}$ con $F_s = 16.000$ muestras/s se corresponde a $\omega = \pi/4$).

Por lo tanto el diagrama de polos y ceros será el siguiente:

Figura 9. Diagrama de polos y ceros del ejemplo



En este caso se ha dibujado también la región de convergencia o ROC, que estará marcada por los polos del filtro (hacia fuera, al tratarse de un filtro causal). Para que el filtro sea estable deberemos fijar el módulo de los polos a un valor $r < 1$.

La función de transferencia resultante será:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z-re^{j\frac{\pi}{4}})(z-re^{-j\frac{\pi}{4}})} = G \frac{z^2-1}{z^2-r(e^{j\frac{\pi}{4}}+e^{-j\frac{\pi}{4}})z+r^2} = \\
 &= G \frac{z^2-1}{z^2-r2\cos(\frac{\pi}{4})z+r^2}
 \end{aligned}$$

Finalmente:

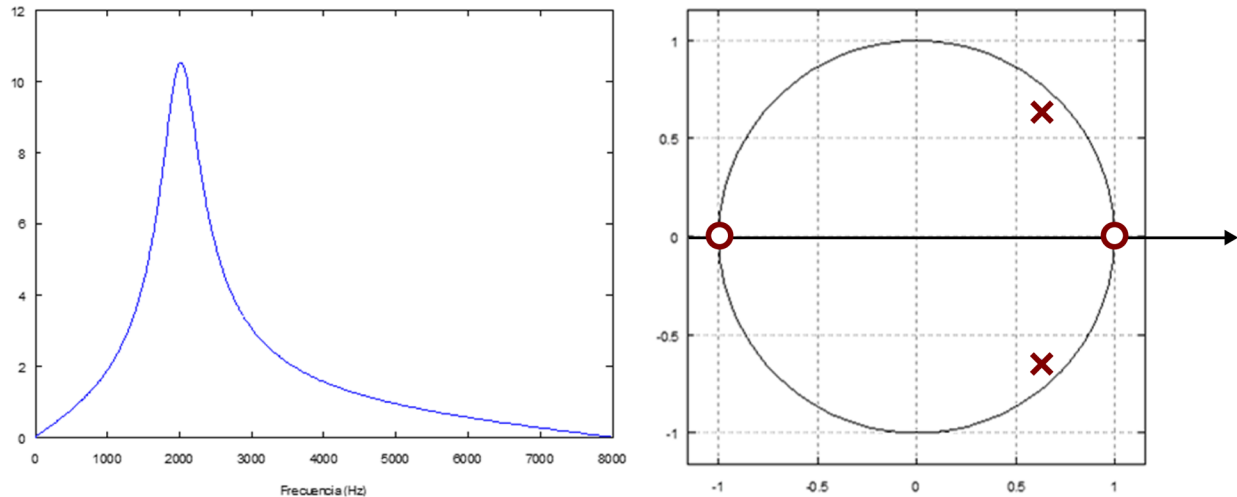
$$H(z) = G \frac{z^2-1}{z^2-r\sqrt{2}z+r^2} = G \frac{1-z^{-2}}{1-r\sqrt{2}z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

```

%Comprobemos el resultado con Octave/Matlab particularizando
%G=1 y r=0,9
B=[1, 0, -1];
A=[1, -0,9*sqrt(2), 0,81];
[H,w]=freqz(B,A,512,16000);
plot(w,abs(H)); xlabel('Frecuencia (Hz)');
zplane(B,A);
%La función zplane permite representar el diagrama de polos
%y ceros de un SLIT

```

Figura 10. Módulo de la respuesta en frecuencia y diagrama de polos y ceros del ejemplo



A continuación se tratarán brevemente los conceptos de estabilidad, causalidad y fase mínima que hay que tener en cuenta cuando se diseña un filtro digital.

1.7.1. Estabilidad

Recordemos que un sistema lineal e invariante es estable si su respuesta impulsional es absolutamente sumable, es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Si intentamos expresar esta condición en función de la transformada Z, podemos llegar a la siguiente conclusión:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| \quad z=1 < \infty$$

Esta condición equivale a decir que **un sistema será estable si la región de convergencia del sistema engloba el círculo unidad, o dicho de otro modo, un sistema será estable si existe su TFSD.**

A la práctica la condición de estabilidad provoca, como requisito de diseño para sistemas causales, que los polos de la función de transferencia estén ubicados en el interior del círculo unidad, ya que la región de convergencia queda definida como el exterior del círculo de radio igual al módulo del polo de máximo módulo para un sistema causal. O sea, que **un sistema estable y causal deberá cumplir que todos los polos se hallen dentro del círculo unidad, o lo que es lo mismo, que tengan módulo menor a la unidad.** Es por esto

que los filtros FIR causales, sin polos explícitos (los implícitos se encuentran en $z=0$), son siempre estables, ya que la región de convergencia es todo el plano Z .

1.7.2. Causalidad

Recordemos también que los sistemas causales (o no anticipativos) son aquellos en los que la señal de salida en un determinado instante de tiempo, $y[n_0]$, solo depende de las muestras de la señal de entrada evaluadas en índices de tiempo inferiores o iguales a n_0 . Dicho de otra forma, sistemas en los que la entrada siempre precede a la salida.

Un sistema será causal o no anticipativo siempre que su respuesta impulsional cumpla $h[n]=0$ para $n<0$. Si el sistema es causal, la entrada siempre tiene que preceder a la salida, consecuentemente, la salida a una función delta de entrada tiene que darse en valores iguales o posteriores a la posición temporal de la señal. La respuesta impulsional se dará en las muestras sucesivas a partir del instante $n=0$.

En sistemas causales (secuencias orientadas a derecha), como hemos dicho antes, la condición de estabilidad implica que todos los polos estén dentro del círculo unidad, ya que el ROC es el exterior del polo de módulo máximo.

Ejemplo

Supongamos un sistema discreto lineal e invariante con la siguiente respuesta impulsional:

$$h[n] = a^n \cdot u[n]$$

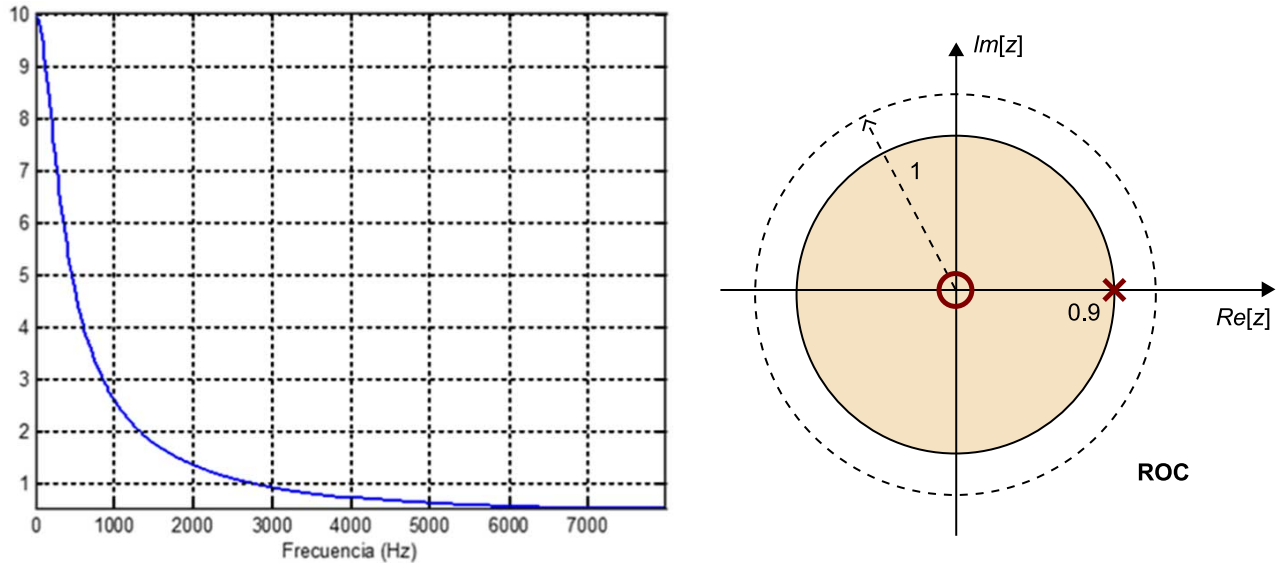
Su transformada Z es:

$$H(z) = \frac{z}{z-a}$$

Con la ayuda del Octave/Matlab representaremos el diagrama de polos y ceros y el módulo de la función de transferencia.

```
%Comprobemos el resultado con Octave/Matlab particularizando a = 0.9
A=[1, -0.9];
B=[1];
[H,w]=freqz(B,A,512,16000);
plot(w,abs(H)); xlabel('Frecuencia (Hz)');
zplane(B,A);
```

Figura 11. Módulo de la respuesta en frecuencia y diagrama de polos y ceros del ejemplo



Si nos fijamos en el diagrama de polos y ceros, observamos un polo cerca de $z = 1$ (dirección $\omega = 0$). Por tanto el filtro se comporta como un paso-bajo. El cero casi no tiene influencia (ninguna frecuencia se anula del todo).

Ahora vamos a interpretar la estabilidad y la causalidad. Ya hemos visto que con un valor de $a = 0,9$ el sistema es estable, ya que al tender su respuesta impulsional a cero, la suma de sus valores en módulo también tiende a un valor finito. El diagrama de polos y ceros nos confirma esta propiedad ya que la ROC contiene la circunferencia unidad. También hemos visto que el sistema es causal. La forma de la ROC (exterior a una circunferencia) también nos confirma esta propiedad. Si, en cambio, $a > 1$, el sistema se convierte en inestable, al dar una respuesta impulsional que tiende a infinito, y al no contener la ROC el círculo unidad.

En resumen, para que un sistema sea a la vez estable y causal, todos los polos deben estar dentro de la circunferencia unidad.

1.8. Retardo de grupo y sistemas de fase mínima

Ejemplo

Consideremos un sistema que solamente introduce un retardo de n_0 muestras en la entrada:

$$y[n] = x[n - n_0]$$

Si calculamos la función de transferencia:

$$H(z) = \text{TZ}\{h[n]\} = z^{-n_0}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$$

Si distinguimos entre magnitud y fase:

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad \text{Arg}\{H(e^{j\omega})\} = -\omega n_0$$

Se define el **retardo de grupo** como:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial \text{Arg}\{H(e^{j\omega})\}}{\partial \omega}$$

En el ejemplo se observa que el retardo de grupo define el retardo temporal entre la señal de entrada y la salida, ya que da justamente $\tau_g(\omega) = n_0$. Obviamente, este sistema retrasa en todas las frecuencias la misma cantidad de muestras, al tratarse de un retardo de n_0 muestras. Todos los SLIT causales introducen algún tipo de retardo, al basarse en celdas de memoria y combinaciones lineales de versiones memorizadas de las señales de entrada y de salida.

En general, si un sistema tiene fase lineal tendrá un retardo de grupo constante, con lo cual, no introducirá distorsión de fase, ya que todas las frecuencias quedarán retardadas la misma cantidad de muestras.

Los sistemas FIR serán de fase lineal si la respuesta impulsional tiene una simetría par o impar. El retardo de fase (y de grupo) coincidirá con el centro de la simetría, como se verá en el apartado siguiente.

Los sistemas IIR no son de fase lineal. Para minimizar distorsiones debidas al retardo de grupo no constante en este tipo de sistemas, se debe intentar que los sistemas sean de **fase mínima**. Un sistema es de fase mínima si tanto él como su sistema inverso son estables y causales. Por esta razón, los sistemas de fase mínima se consiguen ubicando los ceros, además de los polos, también dentro del círculo unidad. Se denominan sistemas de fase mínima porque al cumplir esta condición (ceros dentro del círculo unidad) se consigue que la curva de evolución de la fase en función en la frecuencia tenga una dinámica mínima o más acotada con relación a filtros con ceros ubicados fuera del círculo unidad. Esta propiedad hará que la distorsión de fase y el retardo de grupo sean lo menores posible para este tipo de filtros.

1.9. Filtros FIR de fase lineal

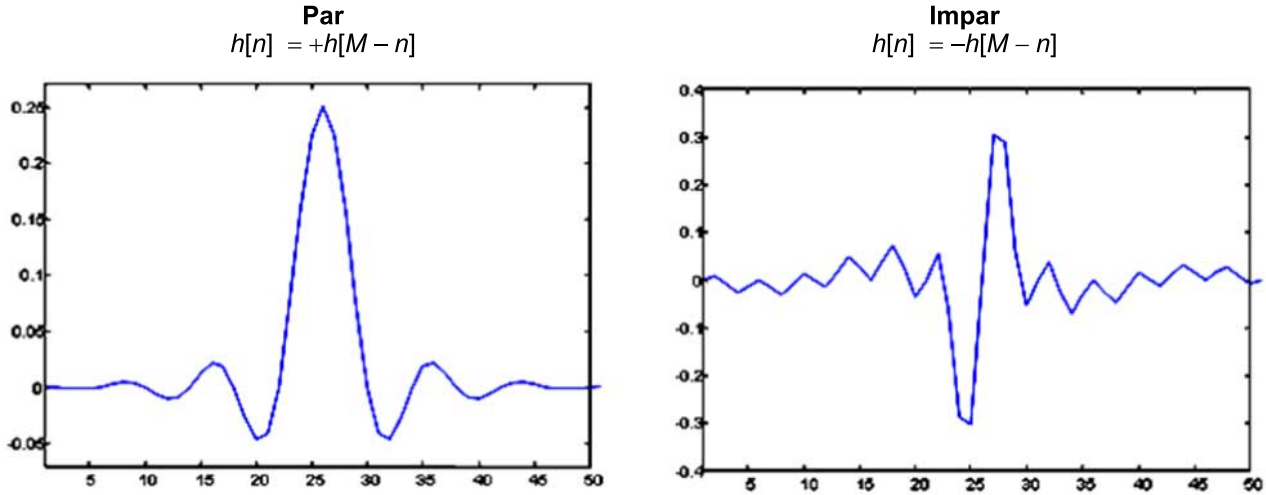
Un filtro FIR de $M + 1$ coeficientes es de fase lineal si cumple la siguiente condición de simetría en su respuesta impulsional:

$$h[n] = \pm h[M - n]$$

donde llamamos a la **simetría par** para el signo positivo mientras que decimos que el filtro tiene **simetría impar** para el signo negativo.

En la figura 12 podemos ver un ejemplo de cada tipo de simetría.

Figura 12. Condición de simetría par (izquierda) o bien impar (derecha) en la respuesta impulsional de filtros FIR para que estos sean filtros de fase lineal



Podemos, a continuación, ver la demostración de linealidad de fase bajo esta condición, para un caso concreto con simetría par y $M+1$ par. Básicamente se trata de agrupar la mitad de términos de la TFSD de la respuesta impulsional (o función de transferencia en frecuencia) con el objetivo de transformar los términos exponenciales complejos en funciones seno o bien coseno. Al final, queda una expresión donde aparece el término de fase multiplicando a una función real de la variable ω , de modo que el término de fase contiene una función lineal de la frecuencia.

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^M h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{k=\frac{M+1}{2}}^M h[M-k]e^{-j\omega k} = \\
 &= \left(\begin{array}{l} M-k=n \\ n_+ = (M-1)/2 \\ n_+ = 0 \end{array} \right) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega(M-n)} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega n} + e^{-j\omega M} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{+j\omega n} = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n](e^{-j\omega(n-\frac{M}{2})} + e^{+j\omega(n-\frac{M}{2})}) = \\
 &= e^{-j\omega \frac{M}{2}} 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]\cos[\omega(\frac{M}{2} - n)] = e^{-j\omega \frac{M}{2}} H_r(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

donde $H_r(e^{j\omega})$ es una función real de la variable ω .

Dado el resultado anterior, podemos afirmar que la fase o argumento del filtro FIR es básicamente lineal con la frecuencia:

$$\text{Arg}\{H(e^{j\omega})\} = -\omega \frac{M}{2} + \pi \frac{(1 - \text{sgn}\{H_r(e^{j\omega})\})}{2}$$

El segundo término de la fase del sistema valdrá 0 cuando $H_r(e^{j\omega})$ tome valores positivos, mientras que valdrá π cuando $H_r(e^{j\omega})$ sea negativa. Este término no es derivable, al presentar discontinuidades de salto cuando $H_r(e^{j\omega})$ cambia de signo. No obstante, no interesa analizar el retardo de grupo en estos puntos dado que son lugares donde el módulo de la función de transferencia pasaría por el valor 0, y por lo tanto, anularía las frecuencias dadas.

Por lo tanto nos podemos concentrar en el primer término de la fase para realizar el cálculo del retardo de grupo del filtro:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial \text{Arg}\{H(e^{j\omega})\}}{\partial \omega} = \frac{M}{2}$$

Como vemos, el retardo de grupo es constante e igual al centro de simetría de la respuesta impulsional, que recordemos tiene simetría par. Así pues, hemos podido comprobar cómo la simetría en la respuesta impulsional conlleva una propiedad interesante: la no existencia de distorsión de fase o la existencia de retardo de grupo constante.

Otro aspecto a considerar para este tipo de sistemas es la distribución de ceros. A partir de la condición de simetría se puede demostrar que un filtro FIR de fase lineal tiene los ceros aparejados:

$$\text{TZ}\{h[n]\} = H(z) = \text{TZ}\{\pm h[M-n]\} = \pm \text{TZ}\{h[-(n-M)]\} = \pm z^{-M} H(z^{-1})$$

Como se puede ver en la expresión anterior, cada cero tendrá su correspondiente cero inverso, al cumplirse la condición de simetría de la respuesta impulsional.

En general, los filtros FIR con simetría en la respuesta impulsional permiten expresar la respuesta en frecuencia del filtro como:

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(-\frac{M}{2}\omega + b)} H_r(e^{j\omega})$$

donde $H_r(e^{j\omega})$ es una función real, y b es una constante que vale $\pi/2$ para los filtros FIR que tienen simetría impar respecto la muestra central. De este modo, el retardo de grupo para todos los casos es igual a $M/2$ muestras, es decir, el punto central de simetría de la respuesta impulsional.

Veamos a continuación el resultado de los desarrollos de $H_r(e^{j\omega})$ para el resto de casos no considerados hasta ahora, en función del tipo de simetría y el número de muestras de la respuesta impulsional del filtro:

- Simetría par y $M + 1$ impar:

$$H_r(e^{j\omega}) = h\left[\frac{M}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{(M-2)}{2}} h[n] \cos\left[\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right]$$

- Simetría impar y $M + 1$ par:

$$H_r(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \sin\left[\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right]$$

- Simetría impar y $M + 1$ impar:

$$H_r(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{(M-2)}{2}} h[n] \sin\left[\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right] \quad ; \quad h\left[\frac{M}{2}\right] = 0$$

Como se puede observar, en el caso de simetría par las agrupaciones de las exponenciales dan lugar a funciones coseno, mientras que en el caso de la simetría impar las agrupaciones dan lugar a funciones seno. Esto tiene una consecuencia que merece especial atención, y es que no todas las configuraciones permiten el diseño de cualquier tipo de filtro discreto. A continuación se detallan estas limitaciones:

- Los filtros FIR con simetría par y $M + 1$ par no pueden ser filtros paso-alto ni filtros rechazo-banda, dado que $H_r(e^{j\omega}) = 0$ para $\omega = \pi$.
- Los filtros FIR con simetría impar y $M + 1$ par no pueden ser filtros paso-bajo ni filtros rechazo-banda, dado que $H_r(e^{j\omega}) = 0$ para $\omega = 0$.
- Los filtros FIR con simetría impar y $M + 1$ impar no pueden ser filtros paso-bajo, ni filtros rechazo-banda, ni filtros paso-alto, ya que $H_r(e^{j\omega}) = 0$ para $\omega = \{0, \pi\}$.

Como se puede apreciar, únicamente los filtros FIR con simetría par y número de coeficientes $(M + 1)$ impar pueden utilizarse para diseñar cualquier tipo de filtro.

1.10. Inversión de sistemas

La igualación, ecualización o inversión de sistemas es un procedimiento habitual en múltiples aplicaciones (p. ej., ecualización de canal en sistemas de comunicaciones, acondicionamiento electro-acústico de salas, etc.). Se trata del procedimiento para conseguir una respuesta lo más plana posible en el do-

minio de la frecuencia y se aplica en general a sistemas lineales e invariantes, aunque también puede aplicarse a sistemas que tienen variaciones temporales (p.ej., igualación de canales en sistemas de comunicaciones móviles o sin hilos). Nosotros lo aplicaremos a SLIT discretos.

1.10.1. Procedimiento general

Sea un SLIT causal y estable, con función de transferencia $H(z)$,

$$H(z) = G \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

con polos p_k para $k = 1 \dots N$, ceros z_k para $k = 1 \dots M$ y ganancia G . Dado que el sistema es causal y estable, los polos cumplirán la condición de estar todos dentro del círculo unidad, es decir, $|p_k| < 1, \forall k \in [1, N]$.

El sistema inverso se define como un sistema causal tal que $H_i(z) = H^{-1}(z)$,

$$H_i(z) = \left(\frac{1}{G}\right) \frac{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}$$

de forma que sus polos serán z_k para $k = 1 \dots M$, sus ceros serán p_k para $k = 1 \dots N$ y su ganancia será $1/G$. De este modo, se conseguirá el efecto deseado, la ecualización de la respuesta en frecuencia del sistema que, visto en el plano complejo Z , no es más que la condición $H(z)H_i(z) = 1$.

El principal problema que puede surgir es el siguiente. En el caso de que el sistema $H(z)$ posea algún cero fuera del círculo unidad, esto es, $|z_k| > 1$ para algún valor de $k \in [1, M]$, entonces el sistema inverso será un sistema inestable, ya que este poseerá uno o más polos fuera del círculo unidad. En este caso, se dice que el sistema no es invertible en módulo y fase. La única solución pasa por usar celdas pasa-todo con el objetivo de, al menos, invertir el módulo de la función de transferencia, como veremos en el subapartado siguiente.

1.10.2. Celdas pasa-todo e inversión de sistemas de fase no mínima

En este apartado definiremos las celdas pasa-todo y seguidamente veremos cómo podemos usarlas para invertir en módulo un sistema de fase no mínima (sistema con ceros fuera del círculo unidad).

Celdas pasa-todo

A continuación vamos a estudiar una celda pasa-todo. Luego veremos cómo nos pueden ser de ayuda para invertir SLIT de fase no mínima, es decir, sistemas que poseen sus ceros fuera del círculo unidad.

Una celda pasa-todo se define a partir de la siguiente función de transferencia:

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{r} e^{j\theta} z^{-1})}{(1 - r e^{j\theta} z^{-1})}$$

siendo r un valor real de módulo menor a la unidad, y θ la fase del polo y del cero.

Es decir, se trata de un sistema IIR de orden 1, donde polo y cero se encuentran ubicados en la misma fase del plano z pero con módulos inversos el uno del otro, estando el polo dentro del círculo unidad y el cero fuera ($r < 1$).

Para verificar que en realidad es un sistema pasa-todo, hemos de calcular el módulo de la función de transferencia encima del círculo unidad:

$$\begin{aligned} |H_{ap}(z = e^{j\omega})| &= \frac{|1 - \frac{1}{r} e^{j\theta} e^{-j\omega}|}{|1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}|} = |r|^{-1} \frac{|1 - e^{j(\theta-\omega)}|}{|1 - r e^{j(\theta-\omega)}|} = \\ &= |r|^{-1} \frac{\sqrt{(1 - \cos(\theta-\omega))^2 + \sin^2(\theta-\omega)}}{\sqrt{(1 - r \cos(\theta-\omega))^2 + r^2 \sin^2(\theta-\omega)}} = \\ &= |r|^{-1} \frac{\sqrt{r^2 - 2r \cos(\theta-\omega) + \cos^2(\theta-\omega) + \sin^2(\theta-\omega)}}{\sqrt{1 - 2r \cos(\theta-\omega) + r^2 \cos^2(\theta-\omega) + r^2 \sin^2(\theta-\omega)}} = \\ &= |r|^{-1} \frac{\sqrt{r^2 - 2r \cos(\theta-\omega) + 1}}{\sqrt{1 - 2r \cos(\theta-\omega) + r^2}} = |r|^{-1} \end{aligned}$$

Dado que el módulo es constante e igual a $|r|^{-1}$ se trata de un sistema pasa-todo. Para normalizar el módulo de la función de transferencia a la unidad, podemos redefinir la celda pasa-todo de la forma siguiente:

$$H_{ap}(z) = r \frac{(1 - \frac{1}{r} e^{j\theta} z^{-1})}{(1 - r e^{j\theta} z^{-1})}$$

En cuanto al argumento de la función de transferencia se puede comprobar cómo tiene una variación no lineal con la pulsación discreta ω . Es decir, este tipo de sistemas producen lo que se denomina distorsión de fase, lo cual puede ser un motivo de degradación de una señal, especialmente en aplicaciones donde sea importante preservar la forma de onda de ciertas señales (p. ej., en aplicaciones de las comunicaciones digitales: filtros para eliminar ruidos e interferencias). De hecho, esto se puede apreciar en el hecho de que la fase tiene una respuesta no lineal (como se verá en el ejemplo del apartado siguiente), lo cual produce un retardo de grupo no constante. Es decir, la distorsión de

fase es debida al hecho de que el filtro retarda de forma distinta (un número de muestras diferente) cada frecuencia de la señal de entrada, y no al hecho de que el filtro amplifique de forma distinta estas componentes.

Inversión en módulo de sistemas de fase no mínima

Supongamos el siguiente sistema discreto:

$$H(z) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 2jz^{-1})(1 + 2jz^{-1})}{(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 + 0,5e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

Si queremos invertir este sistema podemos observar que, dado que este posee dos ceros fuera del círculo unidad ($z_1 = 2j = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$ y $z_2 = -2j = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$), el sistema inverso sería un sistema inestable, ya que los dos polos asociados a los inversos de estos ceros no cumplirían la condición de estabilidad, asumiendo que estamos tratando con sistemas causales. Los sistemas con ceros dentro del círculo unidad se denominan sistemas de fase mínima y pueden invertirse sin ningún tipo de problema. En este sentido, podemos decir que el sistema no es igualable totalmente. No obstante, podemos realizar una igualación en cuanto al módulo de la función de transferencia multiplicando el sistema inverso por las celdas pasa-todo que hagan estable el sistema inverso, de forma que cada celda pasa-todo añadida provocará un cambio en el módulo de los polos externos al círculo unidad. Veámoslo con el ejemplo:

Ejemplo

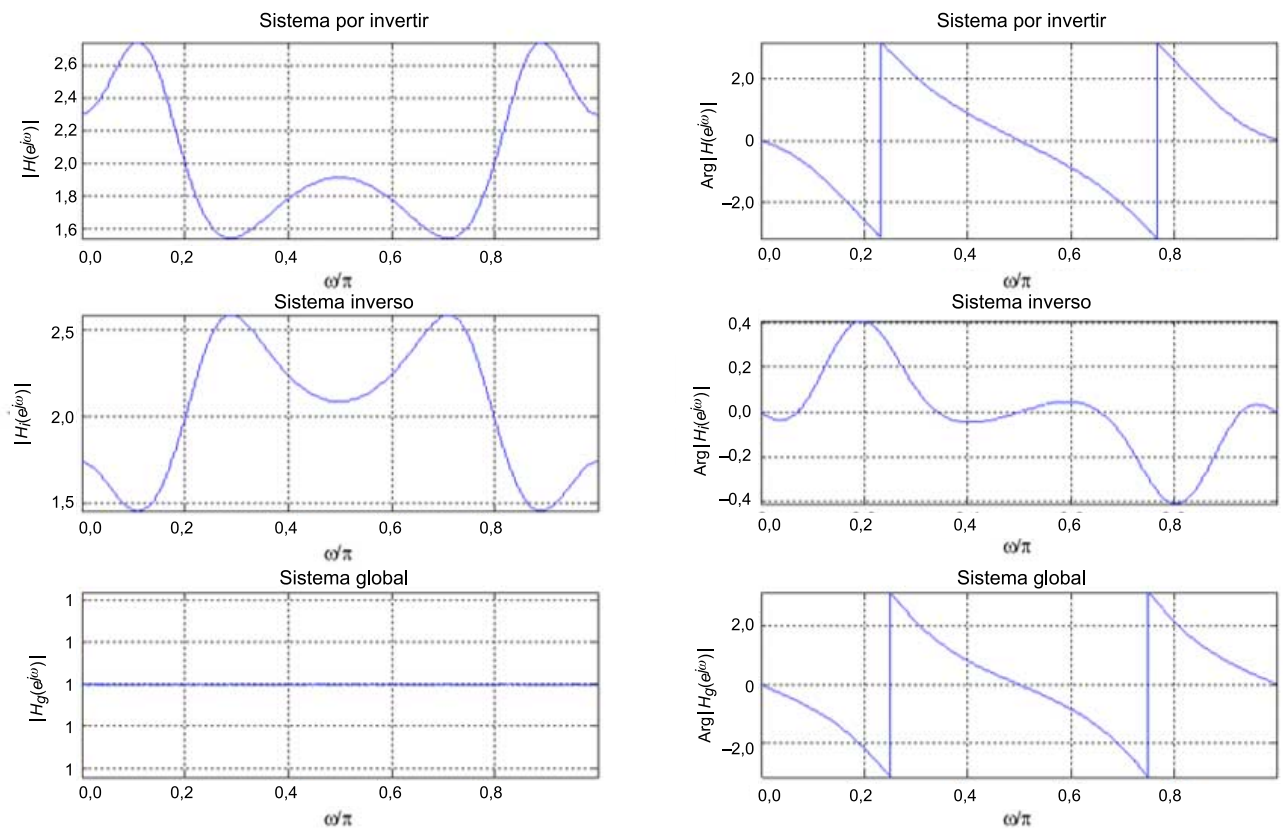
$$\begin{aligned} H_{ap}^{-1}(z) &= 2 \frac{(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 + 0,5e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 2jz^{-1})(1 + 2jz^{-1})} \times (0,5 \frac{(1 - 2e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}{(1 - 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}) \times (0,5 \frac{(1 + 2e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}{(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}) = \\ &= 0,5 \frac{(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 + 0,5e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})} \end{aligned}$$

De este modo, el sistema equivalente formado por la concatenación serie del sistema original seguido del sistema anterior (le llamaremos sistema inverso aunque estrictamente no lo es) es:

$$H(z)H_{ap}^{-1}(z) = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{(1 - 2jz^{-1})(1 + 2jz^{-1})}{(1 - 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}$$

En la figura siguiente se puede apreciar cómo el sistema diseñado consigue igualar el módulo de la función de transferencia, aunque no consigue igualar la fase. Como se puede apreciar en la gráfica inferior derecha, la fase del sistema global, formado por la concatenación serie del sistema original y el sistema diseñado, sigue una trayectoria no lineal, hecho que constata que la fase del sistema no ha quedado igualada y que únicamente se ha conseguido igualar o ecualizar el módulo (figura inferior izquierda).

Figura 13. Funciones de transferencia del sistema original (arriba), sistema inverso (en medio) y sistema global formado por la concatenación serie de los dos sistemas (abajo)



2. Diseño de filtros FIR con el método de las ventanas

El método de las ventanas es el método más sencillo e intuitivo para diseñar filtros FIR. Los pasos del procedimiento de diseño son los siguientes:

- En primer lugar se define la respuesta en frecuencia deseada $H_d(e^{j\omega})$, que hay que especificar dentro de un periodo, por ejemplo $-\pi < \omega \leq \pi$.
- En segundo lugar, se calcula la respuesta impulsional del filtro ideal $h_d[n]$ calculando la TFSD inversa de la respuesta en frecuencial ideal.
- Finalmente se aplica la ventana temporal $w[n]$, finita y definida en el intervalo de muestras $0 \leq n \leq M$, adecuada para cumplir las especificaciones de diseño planteadas inicialmente, multiplicando la respuesta impulsional anterior por la ventana escogida: $h[n] = h_d[n]w[n]$. La forma de la ventana así como su longitud temporal (que será igual al número de coeficientes final del filtro diseñado $M+1$) serán los parámetros de diseño que permitirán ajustarse a las especificaciones de diseño. La respuesta impulsional final obtenida $h[n]$ serán nada más y nada menos que los coeficientes del filtro FIR (tal y como vimos en el apartado “Estudio de un filtro paso-bajo ideal”), es decir: $B_k = h[k]$ para $0 \leq k \leq M$.

En la práctica, en el primer paso se definen respuestas frecuenciales ideales formadas por pulsos rectangulares en el dominio de la frecuencia, de forma que en el segundo paso del diseño se obtienen respuestas impulsionales ideales formadas por combinaciones lineales de funciones *sinc* y deltas de Dirac en el dominio del tiempo.

Por lo general, cuando se hace un procesamiento de señales reales, la función de transferencia cumple la propiedad de hermeticidad (la función de transferencia evaluada en una frecuencia $-\omega$ dará el mismo valor pero complejo conjugado del valor de la misma función de transferencia en la frecuencia ω , es decir, $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$). Esta propiedad ya queda reflejada en las especificaciones de diseño así como en la respuesta frecuencial ideal de partida (paso 1). Además, las ventanas que se utilizan acostumbra a tener unas características bastante peculiares y, en general, se pueden describir principalmente en el dominio frecuencial mediante su TFSD ($W(e^{j\omega}) = \text{TFSD}\{w[n]\}$), ya que es ahí donde se descubren los atributos que afectarán a la calidad del diseño final. Es frecuente que $W(e^{j\omega})$ esté formada por un lóbulo principal centrado en $\omega=0$, seguido de lóbulos de menor amplitud ubicados a lo largo del resto de frecuencias (y generalmente de amplitudes decrecientes a medida que nos

acercamos a $\omega = \pi$). Existen, sin embargo, ventanas con lóbulos secundarios de amplitud constante (ventana de Hamming) u otras incluso sin lóbulos secundarios (ventana paramétrica de Hanning-Poisson).

El paso 3 de la fase de diseño obedece a la necesidad de conseguir un filtro con una respuesta impulsional finita (no olvidemos que perseguimos el diseño de un filtro FIR) así como que este sea un sistema causal (recordad que la respuesta impulsional de un sistema causal debe cumplir la condición $h[n] = 0$ para $n < 0$).

Al realizar el paso 3 de la fase de diseño del filtro, se produce un efecto de convolución en el dominio de la frecuencia entre la respuesta frecuencial ideal $H_d(e^{j\omega})$ y la transformada de Fourier de la ventana usada $W(e^{j\omega})$ (recordad la propiedad de ventaneo de la TFSD, que provoca la aparición de efectos de distorsión en la respuesta frecuencial del diseño final respecto de la ideal). Los principales efectos de distorsión son:

- Aparición de una banda de transición más ancha (idealmente inexistente o de anchura nula), provocada principalmente por la anchura del lóbulo principal de la ventana usada (caracterización de dicha ventana en el dominio frecuencial $W(e^{j\omega})$).
- Aparición de rizados en las bandas de paso y atenuadas (idealmente inexistentes, también), provocados principalmente por el resto de los lóbulos secundarios presentes en $W(e^{j\omega})$.

Así, la única forma de controlar los efectos de distorsión anteriores es realizando una cuidadosa selección de la ventana usada en el paso 3 del proceso de diseño del filtro. Para tener unos buenos resultados en el diseño, el lóbulo principal de la ventana tiene que ser lo más estrecho posible y debe concentrar el máximo de energía de toda la señal (lóbulos secundarios de baja amplitud). Por eso se comparan, en general, dos factores importantes sobre $W(e^{j\omega})$:

- **Leakage o relación principal a secundario:** es la diferencia en dB entre los picos del lóbulo principal y del lóbulo secundario (el segundo más elevado). Cuanto menor es el *leakage* mayores serán los rizados que aparecerán en las bandas de paso y atenuadas del filtro, con lo que, en general, interesa maximizarlo. A mayor *leakage*, la energía de la ventana queda más confinada al lóbulo principal.
- **Ancho del lóbulo principal:** parámetro relacionado con la resolución lograda en el diseño, referente sobre todo a las transiciones repentinas, como es el caso de la transición entre las bandas de paso y las bandas atenuadas. Cuanto mayor sea su valor tendremos bandas de transición más anchas y, con lo cual, más imperfectas. Interesa, pues, minimizar su valor.

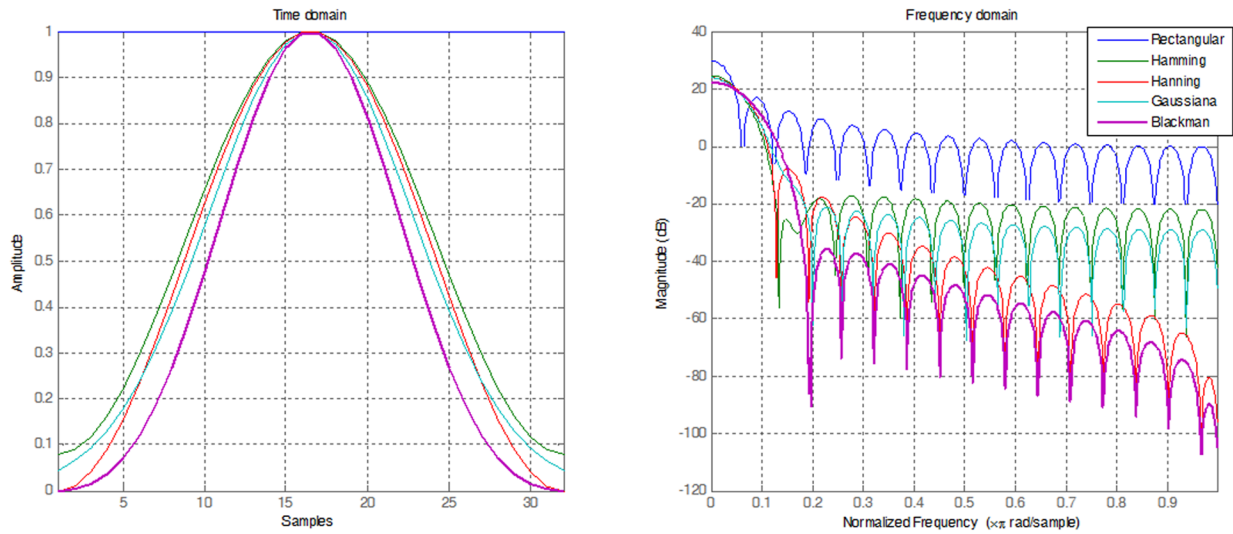
Por lo tanto, los retos del diseño de un filtro con el método de las ventanas persiguen tener un valor de *leakage* lo mayor posible, y de un ancho de lóbulo principal lo más pequeño posible. También se constata que para una longitud del filtro fija, es imposible conseguir ambos objetivos de forma simultánea, ya que en general un factor juega en contra del otro. Por ejemplo, si analizamos la ventana más sencilla que podemos usar, la ventana rectangular, esta es la que tiene un ancho de lóbulo principal menor (es la ventana más resolutive en el dominio frecuencial), mientras que es también la ventana que posee un *leakage* más pequeño. Es decir, que con la ventana rectangular conseguiremos diseños con bandas de transición de anchura mínima, mientras que las bandas de paso y de rechazo tendrán un rizado máximo. Si queremos obtener otros diseños utilizando otras ventanas, podremos conseguir nuevos diseños con menos rizado, pero inevitablemente con bandas de transición más anchas.

2.1. Análisis de algunas ventanas típicas

Existen diferentes tipos de ventanas, y en la figura 14 se muestran algunos ejemplos de ventanas típicas para un valor de $M = 31$ (es decir, con 32 coeficientes).

Como se puede observar, la mayoría de ventanas persiguen balancear mejor el compromiso entre *leakage* y anchura del lóbulo principal a través de un suavizado de las transiciones inicial y final de la señal temporal. En la ventana rectangular estas transiciones son muy abruptas, lo que provoca la aparición de mucha energía de alta frecuencia (*leakage* es, pues, más pequeño) mientras que en las otras ventanas que se muestran, estas transiciones son más suaves, de forma que el *leakage* queda ampliado significativamente. Las ventanas Hamming y Gaussiana aún conservan un poco de discontinuidad al inicio y al final de las señales temporales (no empiezan o acaban en cero) hecho que provoca un *leakage* no tan bueno (o grande). En cambio, las ventanas Hanning o Blackman consiguen ampliar el *leakage* de forma muy significativa al transicionar temporalmente desde y hacia valores cercanos a cero. Por otro lado, estas dos ventanas son las que tienen una energía temporal más localizada o concentrada alrededor de la mitad temporal, hecho que provoca que el lóbulo principal en estos dos casos sea significativamente mayor que en los otros y, muy especialmente, si se compara respecto el lóbulo principal de la ventana rectangular.

Figura 14. Forma temporal (izquierda) y módulo de la transformada de Fourier o TFSD (derecha) de algunas ventanas típicas, todas ellas de 32 muestras ($M = 31$). El módulo de la transformada de Fourier se representa en dB, realizando el 20 logaritmo en base 10 de la función módulo



2.2. Ejemplo de diseño

Vamos a ver un ejemplo de diseño de filtro paso-bajo discreto con el método de las ventanas. Seguiremos los pasos del diseño explicados al inicio del apartado 2.

1) **Paso 1:** La forma del filtro ideal en el dominio frecuencial será un pulso rectangular centrado en $\omega = 0$, de amplitud igual a la ganancia del filtro en la banda de paso que denominaremos G y valdrá la unidad en este ejemplo, y de anchura relacionada con la frecuencia de corte del filtro que llamaremos ω_c y valdrá $\pi/4$. Veamos la respuesta frecuencial ideal, que la podemos definir analíticamente como:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} G & |\omega| \leq \omega_c < \pi \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Esto permitiría, por ejemplo, generar un filtro discreto capaz de eliminar las frecuencias por encima de 1 KHz si trabajamos con señales muestreadas a 8 KHz.

2) **Paso 2:** Calculamos la respuesta impulsional ideal:

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} G e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{G e^{j\omega n}}{jn} \bigg|_{-\omega_c}^{+\omega_c} = \\ &= \frac{G}{n\pi} \frac{(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n})}{2j} = \frac{G}{n\pi} \text{sen}(\omega_c n) \end{aligned}$$

Como vemos este filtro tiene una respuesta impulsional infinita, ya que es una función *sinc* discreta, con el máximo ubicado en $n=0$ y con un decrecimiento a razón de $\frac{1}{n}$ para valores crecientes o bien decrecientes de n . El proceso de ventaneo provocará la finitud de la respuesta impulsional del filtro, pero es importante darse cuenta de que el retardo de grupo de este filtro es $\tau_g(\omega)=0$, ya que se trata de un filtro con simetría par respecto de este punto del eje de muestras. Esto también se observa al ser la respuesta frecuencial real, con lo que la fase del filtro es nula. Entonces, está claro que si truncamos luego la respuesta impulsional al intervalo de muestras $0 \leq n \leq M$ estaremos también truncando la simetría par del filtro, y dejaremos de tener un filtro de fase lineal. Como vimos en el subapartado 1.9, los filtros FIR de fase lineal tienen un retardo de grupo igual a $M/2$, que coincide con el centro de simetría del filtro en el dominio temporal. En general, con el método de las ventanas conseguiremos siempre filtros de fase lineal, y con simetría par. Para conseguir esto, es necesario introducir el término de fase lineal del filtro en la definición de la función de transferencia, es decir:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} Ge^{-j\omega \frac{M}{2}} & |\omega| \leq \omega_c < \pi \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

De este modo, si volvemos a calcular la respuesta impulsional:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} Ge^{-j\omega \frac{M}{2}} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{Ge^{j\omega(n-\frac{M}{2})}}{j(n-\frac{M}{2})} \Big|_{-\omega_c}^{+\omega_c} = \frac{G}{(n-\frac{M}{2})\pi} \sin\left(\omega_c\left(n-\frac{M}{2}\right)\right)$$

Ahora tenemos la respuesta impulsional centrada en el centro de simetría de la señal una vez se haya procedido a realizar el proceso de ventaneo. Este proceso se puede realizar como un sencillo desplazamiento temporal, pero únicamente cuando el valor de M es par, por lo que la expresión analítica calculada es de mayor interés para filtros de cualquier número de coeficientes.

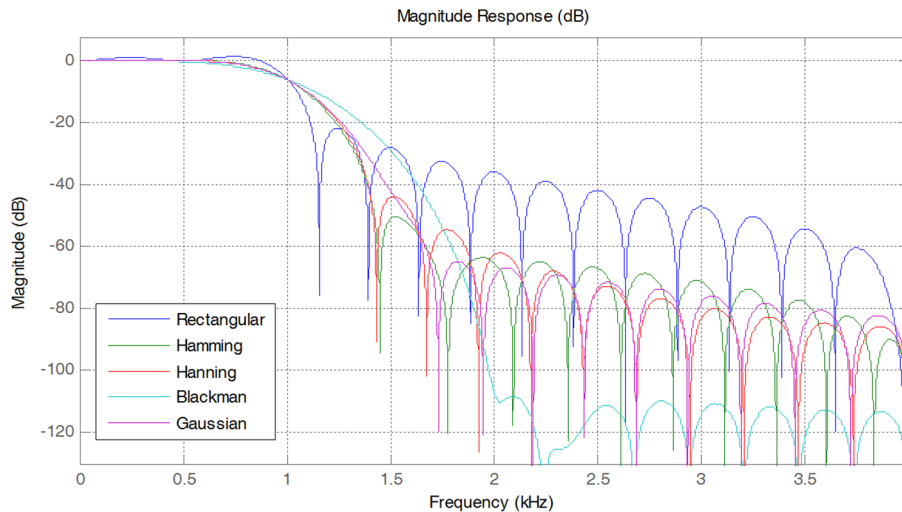
3) Paso 3: Aplicamos la ventana $h[n] = h_d[n]w[n]$. En la figura 15 se puede observar el módulo de la respuesta frecuencial de cinco filtros FIR obtenidos mediante la aplicación de las cinco ventanas distintas analizadas en el apartado anterior, y con un valor del parámetro $M=31$. Como vimos en el subapartado 2.1, la ventana rectangular es la más resolutive (lóbulo principal más estrecho), lo que provoca una banda de transición entre la banda de paso y la atenuada más estrecha. No obstante, con la ventana rectangular también se observa un mayor rizado en las bandas de paso y atenuada (especialmente esto se observa mejor en la banda atenuada, ya que los lóbulos que se observan provocan un rechazo más bajo al tener una amplitud mayor). En el otro extremo tenemos el filtro que se obtiene con la ventana Blackman, que posee un rizado mucho

Ved también

Recordemos que el retardo de grupo se define como la derivada de la fase respecto de la pulsación discreta cambiada de signo.

menor pero una banda de transición mucho más ancha. Con el resto de ventanas se obtienen compromisos, entre anchura de banda de transición y rizados en las bandas de paso y atenuada, más equilibrados.

Figura 15. Ejemplo de diseño de un filtro paso-bajo con frecuencia de corte a $\omega = \pi/4$ y ganancia en la banda de paso $G = 1$. Se representa el módulo de la respuesta frecuencial usando cinco ventanas distintas, y el módulo se expresa en dB realizando $G(\omega) = 20 \log_{10}|H(e^{j\omega})|$. El eje frecuencial está en Hz, suponiendo una frecuencia de muestreo de 8 kHz

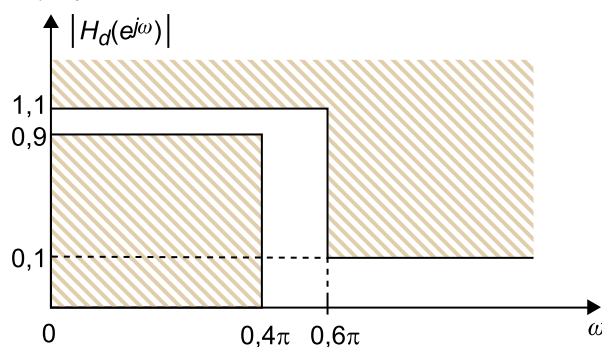


Generalmente, en el momento de realizar el diseño de un filtro FIR con este método hay que comprobar el resultado de la respuesta frecuencial utilizando diferentes ventanas, de forma que el diseñador compruebe cuál de los resultados es el más adecuado para la aplicación en concreto. Aunque este método de prueba y error no siempre da con el mejor resultado.

Ejemplo

Diseño de un filtro paso-bajo FIR de fase lineal con el método de las ventanas que cumpla las siguientes especificaciones en forma de plantilla:

Figura 16. Plantilla de especificaciones del filtro del ejemplo



Utilizaremos la función de Octave/Matlab `fir1.m` para conseguir la respuesta impulsional del filtro deseado. Esta función implementa el método de las ventanas. Se le pasa el número de coeficientes del filtro, el tipo de filtro (paso-alto, etc.), la frecuencia de corte y el tipo de ventana. Por defecto, se refiere a un filtro paso-bajo con una ventana Hamming.

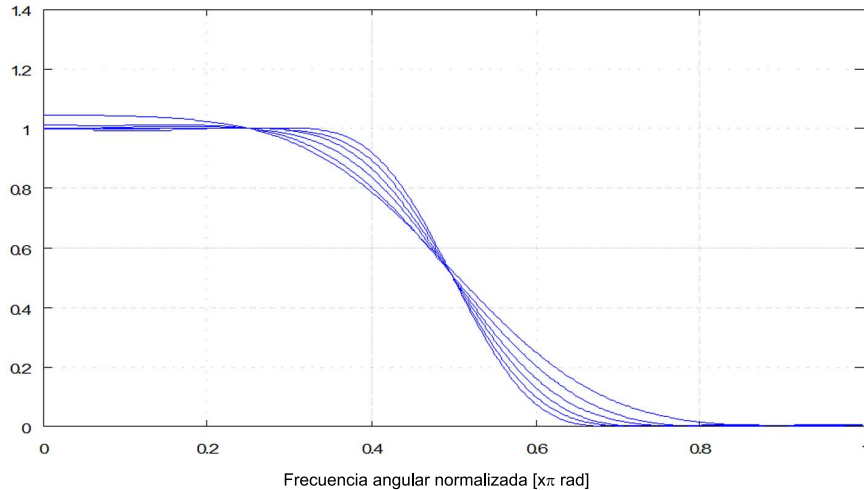
Por el método de prueba y error, llamamos a la función `fir1` con un barrido del parámetro M (número de coeficientes menos uno) de 10 a 20, incrementándolo de dos en dos. El código utilizado, con 21 coeficientes, es:

```
%Diseño de un filtro FIR con el método de las ventanas
%y con una ventana Hamming
```

```
B=fir1(20,0,5); %21 coeficientes, y frecuencia de corte  $\omega_c = \pi/2$ 
[H,w]=freqz(B,1); %Cálculo de la respuesta frecuencial del filtro
plot(w/pi,abs(H)); %Dibujo de la respuesta frecuencial
```

El resultado del análisis es el que se muestra en la figura 17, donde se han probado y superpuesto las gráficas correspondientes a los diferentes órdenes especificados antes.

Figura 17. Respuesta frecuencial de los diseños de filtro FIR con el método de las ventanas y con una ventana Hamming para los diferentes órdenes analizados



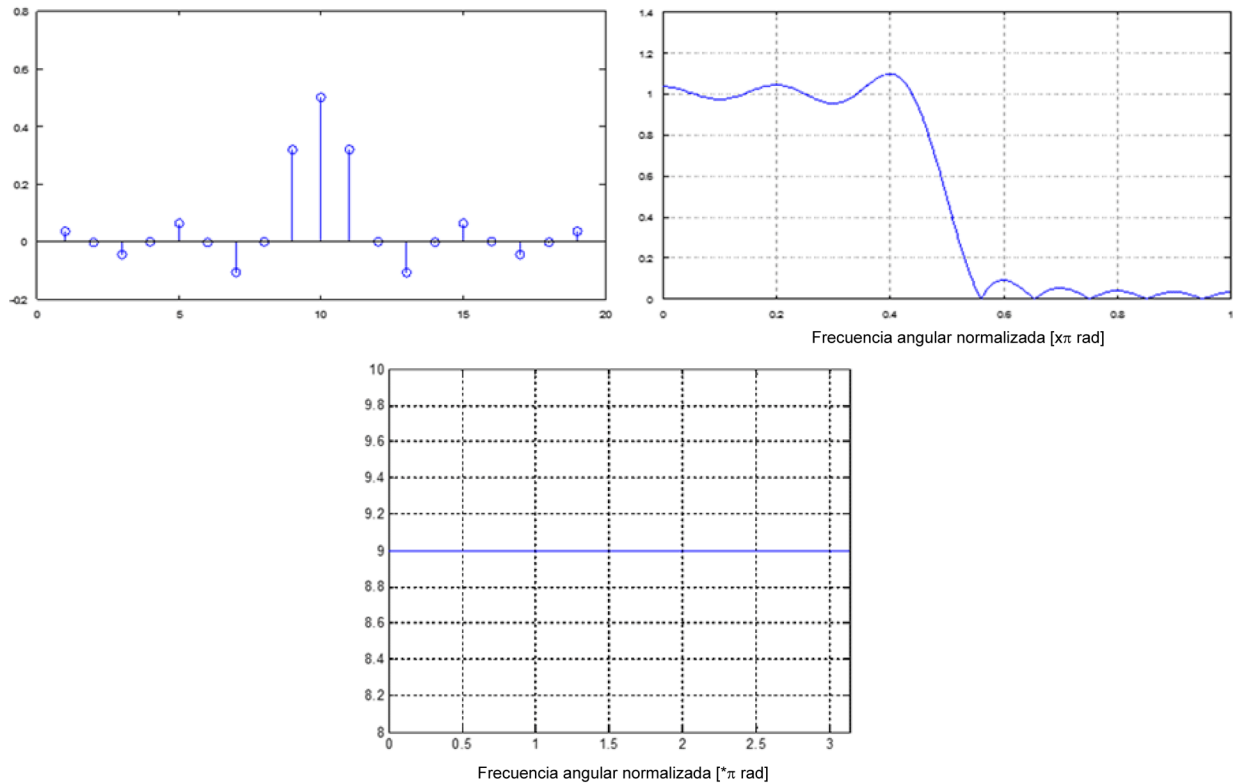
Se observa que a medida que aumentamos el número de coeficientes el filtro se aproxima más al ideal, consiguiéndose cumplir las especificaciones de la plantilla con 20 coeficientes.

Si probamos con una ventana rectangular aparece un mayor rizado en la banda de paso. Las especificaciones de la plantilla se cumplen, en este caso, con un mínimo de 18 coeficientes.

```
%Diseño de un filtro FIR con el método de las ventanas
%y con una ventana Rectangular
B=fir1(18,0,5,ones(1,19));%19 coeficientes, y frecuencia de corte
%  $\omega_c = \pi/2$ 
[H,w]=freqz(B,1); %Cálculo de la respuesta frecuencial del filtro
figure;stem(B) %Visualizamos la respuesta impulsional
figure;plot(w/pi,abs(H)); %Dibujo de la respuesta frecuencial
xlabel('Frecuencia angular normalizada (*pi rad)');
figure;[G,w] = grpdelay(B); plot(w,G); %Dibujo del retardo de grupo
xlabel('Frecuencia angular normalizada (*\pi rad)');
```

En este caso obtenemos las siguientes gráficas tanto en el dominio frecuencial como en el temporal (ver figura 18).

Figura 18. Respuesta impulsional (izquierda arriba), módulo de la respuesta frecuencial (derecha arriba), y retardo de grupo (abajo) del filtro FIR diseñado con el método de las ventanas, utilizando una ventana rectangular, para un orden de 18 (19 coeficientes)



Como se puede observar, se trata de una función *sinc* ventaneada con un pulso rectangular. Como también se aprecia, el filtro tiene un retardo de grupo constante e igual a $\frac{M}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

2.3. Método de la ventana Kaiser

En ciertas aplicaciones resulta conveniente ajustar bien estas características ya que influyen en el resultado de la respuesta frecuencial del diseño. Por este motivo, Kaiser estudió el uso de una nueva ventana que tiene la característica diferencial respecto de las ya vistas hasta ahora, que, además de depender del parámetro M (duración – 1), también depende de un parámetro que permite ajustar de forma adecuada la relación entre ambas características fundamentales (ancho del lóbulo principal frente a *leakage*), obteniendo un abanico de posibilidades mucho mayor.

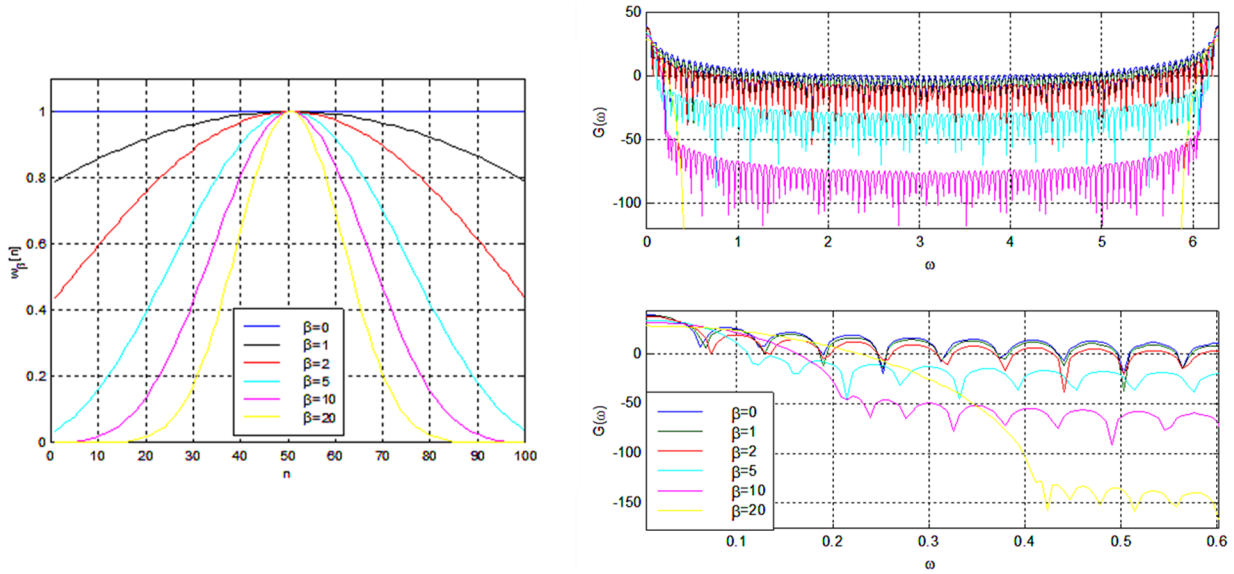
La **ventana Kaiser** se define a partir de la función de Bessel modificada de orden cero y de primera especie:

$$w_{M,\beta}[n] = \frac{I_0\left[\beta \frac{2}{M} \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{M}{2}\right)^2}\right]}{I_0[\beta]} \quad \beta > 0 \quad y \quad 0 \leq n \leq M$$

donde β es un valor real positivo asociado a la forma de la ventana.

En la figura 19 se puede observar la forma temporal y frecuencial de esta ventana para distintos valores del parámetro β y para un valor de $M = 100$. Obsérvese que para $\beta = 0$ la ventana Kaiser se reduce a una ventana rectangular (más resolutive pero con *leakage* bajo), mientras que valores positivos crecientes producen un abanico de ventanas con lóbulo principal cada vez más ancho pero con *leakage* cada vez más óptimo. En definitiva, el valor de β será crucial para conseguir un diseño específico, al igual que también lo es el parámetro M (aunque este afecta únicamente a la anchura del lóbulo principal).

Figura 19. Forma temporal (izquierda) y frecuencial (derecha, se representa el módulo en dB) de la ventana Kaiser para diferentes valores del parámetro β y con 100 coeficientes



Kaiser hizo un estudio de los valores óptimos de los parámetros M y β para alcanzar una determinada calidad en el diseño final. El estudio se centró en el caso de un filtro prototipo paso-bajo. Los parámetros que definen la calidad del diseño son:

- El rizado en las bandas atenuadas y de paso δ (expresado en lineal).
- El ancho de banda de la transición $\Delta\omega$ (en pulsación discreta).

Las expresiones de diseño con el método de la ventana Kaiser son las siguientes:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A - 8,7) & A > 50 \\ 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0,0 & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A - 8}{2,285\Delta\omega}$$

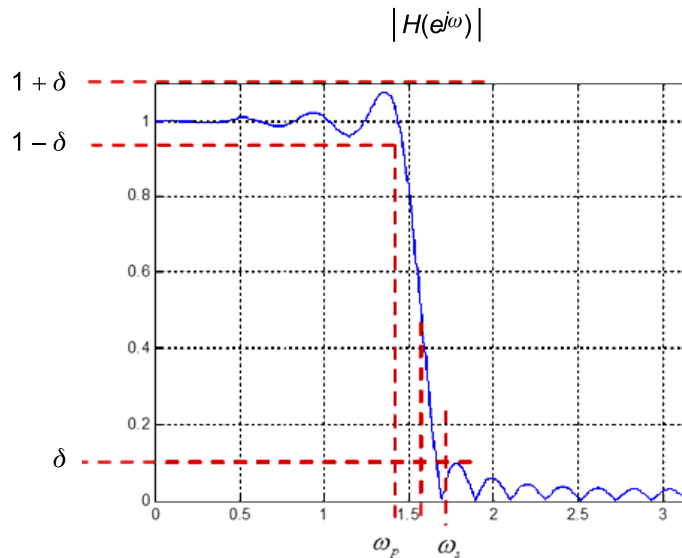
siendo, $A = -20\log_{10}\delta$ el rizado expresado en dB, $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$, ω_s la pulsación mayor de la banda de paso donde $|H(e^{j\omega})| > 1 - \delta$, y ω_p la pulsación menor de la banda atenuada donde $|H(e^{j\omega})| < \delta$. El valor de M obtenido deberá ser redon-

deado al menor entero mayor o igual al valor calculado (función `ceil.m` de Octave/Matlab), dado que el resultado especifica un orden mínimo para satisfacer las condiciones de diseño. La frecuencia de corte del filtro se considera como:

$$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2}$$

En la figura 20 se pueden ver gráficamente las especificaciones de diseño que representan los parámetros ω_s , ω_p y δ . Como se puede apreciar, con el método de diseño de filtros FIR de las ventanas se obtienen filtros con rizado simétrico (en lineal), es decir, la amplitud de rizado es la misma en la banda de paso que en la banda atenuada.

Figura 20. Ejemplo de especificaciones de diseño para el método de la ventana Kaiser



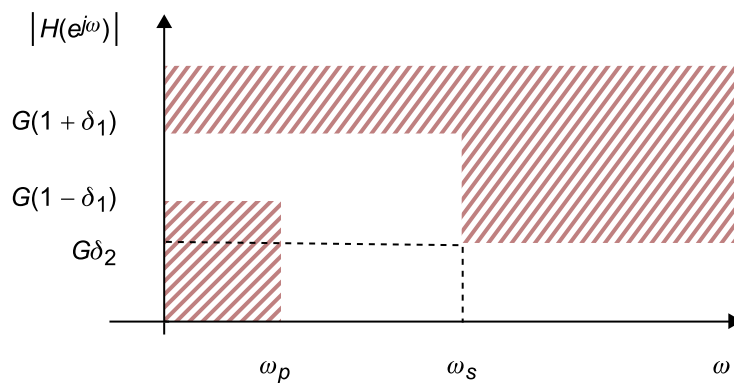
Ejemplo

Se requiere realizar el siguiente diseño:

- Filtro paso-bajo que elimine todas las frecuencias por encima de 10 kHz, con una atenuación mínima de 28 dB.
- Que presente una ganancia de 2 dB en la continua.
- Que la ganancia sea mayor de 1 dB, por debajo de 7 kHz.
- Frecuencia de muestreo de 44.100 muestras por segundo.

Cuando la ganancia del filtro no es la unidad, el rizado del filtro δ se debe normalizar respecto esta ganancia, al ser la ganancia un parámetro que acaba multiplicando a toda la función. En la figura 21 se puede ver la plantilla de especificaciones del filtro paso-bajo donde el parámetro de rizado en las bandas de paso y atenuada está referido al parámetro de ganancia G del filtro.

Figura 21. Plantilla de especificaciones del filtro paso-bajo normalizada a la ganancia del filtro



Las especificaciones pueden dar requerimientos de rizado asimétricas, como es este caso. Calculamos en primer lugar el parámetro de ganancia, así como los rizados en las bandas de paso y atenuada que indican las especificaciones:

- Ganancia (conversión de dB a lineal):

$$G = 10^{\frac{20}{20}} = 1,2589$$

- Rizado máximo en la banda de paso:

$$G(1 - \delta_1) = 10^{\frac{1}{20}} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 0,1087$$

- Rizado máximo en la banda atenuada:

$$G\delta_2 = 10^{-\frac{28}{20}} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = 0,0316$$

Por lo tanto, como sabemos que los filtros FIR diseñados con el método de las ventanas tienen rizados simétricos, escogemos como rizado máximo el valor más restrictivo (o menor):

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 0,0316$$

- Calculamos las frecuencias límite de las bandas de paso y atenuada a partir de las especificaciones dadas:

$$\omega_p = 2\pi \times \frac{7.000}{44.100} = 0,9973 \text{ rad}$$

$$\omega_s = 2\pi \times \frac{10.000}{44.100} = 1,4248 \text{ rad}$$

- Frecuencia de corte:

$$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = 1,2110 \quad (\equiv 8.500 \text{ Hz})$$

- Calculamos:

$$A = -20\log_{10}(\delta) = -20\log_{10}(0,0316) = 30 \text{ dB}$$

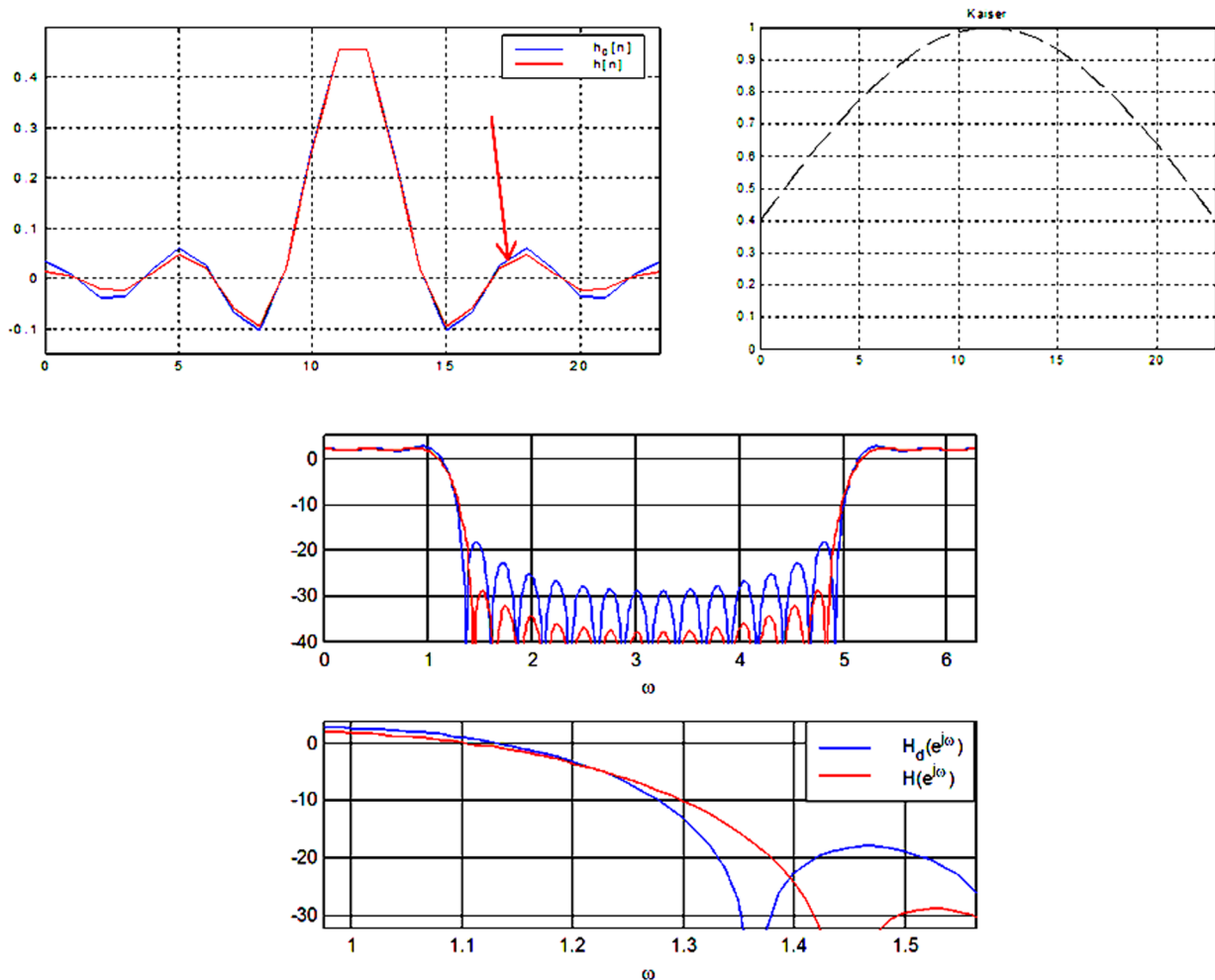
$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0,4274$$

- Realizamos el diseño de los parámetros del filtro:

$$21 < A = 30 < 50 \Rightarrow \beta = 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21) = 2,1166$$

$$M = \frac{A - 8}{2,285 \times \Delta\omega} = \frac{30 - 8}{2,285 \times 0,4274} = 22,52 \Rightarrow M = 23$$

Figura 22. Diseño de filtro FIR paso-bajo con el método de la ventana Kaiser: respuesta impulsional con ventana rectangular y final (arriba a la izquierda), ventana Kaiser (arriba derecha), y módulo de la respuesta frecuencial con ventana rectangular y final en dB (en medio y abajo con mayor resolución)



- Obtenemos la respuesta impulsional ideal del filtro:

$$h_d[n] = G \frac{\sin[\omega_c(n - \frac{M}{2})]}{\pi(n - \frac{M}{2})} = 0,4007 \frac{\sin[1,211(n - 11,5)]}{(n - 11,5)}$$

- La respuesta impulsional final del diseño será:

$$h[n] = \text{kaiser}_{\beta=2,1166, M=23}[n] \cdot h_d[n]$$

En la figura 22 se puede observar el resultado del diseño realizado. Se compara el diseño con la ventana Kaiser respecto del diseño que se obtiene con una ventana rectangular. Como se puede observar, el uso de la ventana Kaiser permite satisfacer los requerimientos de diseño del enunciado. Por ejemplo,

(3) Se entiende por atenuación del filtro el inverso de la ganancia, que en dB se traduce en la ganancia cambiada de signo.

el requerimiento de que elimine todas las frecuencias por encima de 10 kHz, con una atenuación mínima de 28 dB, se traduce a una pulsación discreta de $\omega_s = 1,4248$ rad/muestra. En el caso del diseño con ventana rectangular, por encima de esta pulsación se observa una atenuación³ que tiene el valor mínimo de unos 18 dB, lo que no cumple la especificación. En cambio, el diseño con la ventana Kaiser diseñada sí que cumple la condición, al tener una ganancia que está por debajo de -28 dB.

Para acabar, comentar que el método de diseño se podría aplicar también al diseño de filtros paso-alto. Al tratarse de filtros FIR, podemos obtener un filtro paso-alto a partir de un diseño paso-bajo sencillamente multiplicando la respuesta impulsional del filtro por $(-1)^n = e^{j\pi n}$. Recordemos que esto produce un desplazamiento frecuencial de π radianes en la TFSD, lo que provocará que la banda de paso, inicialmente ubicada en la baja frecuencia, pase a estar ubicada alrededor de la máxima alta frecuencia discreta. Así pues, a partir de unas especificaciones de diseño de un filtro paso-alto, primero deberíamos traducir estas especificaciones al equivalente paso-bajo (traslación mencionada, pero inversa), diseñar el filtro paso-bajo según el procedimiento estudiado, y finalmente multiplicar la respuesta impulsional obtenida del filtro paso-bajo por la exponencial indicada.

3. Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos

En este apartado estudiaremos las técnicas de diseño de filtros de tiempo discreto, que aprovechan las técnicas de diseño de filtros analógicos para obtener diseños que pueden ser implementados como filtros digitales, basados en la ecuación en diferencias finitas y coeficientes constantes.

3.1. Diseño analógico frente a diseño discreto

Igual que en el dominio discreto, en el ámbito de los filtros analógicos se dispone de una herramienta de análisis para posicionar polos y ceros: la **transformada de Laplace (TL)** $H(s)$ de una señal analógica $h(t)$. A continuación destacamos las relaciones entre la herramienta de representación y diseño para filtros analógicos (TL) así como la correspondiente herramienta pero para representar y diseñar filtros de tiempo discreto (TZ) y sus respectivas relaciones con el correspondiente dominio de representación en la frecuencia:

- Relación entre la TFSD y la TZ: la TFSD de una secuencia $h[n]$, $H(e^{j\omega})$, es la particularización de la TZ, $H(z)$, en el círculo unidad, esto es, en el círculo de radio 1 centrado en $z = 0$ y cuya posición queda fijada por el valor de la pulsación discreta de análisis ω :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \quad z \in C \quad \Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

- Relación entre la TF y la TL: la TF de una señal analógica $h(t)$, $H(j\Omega)$, es la particularización de la TL, $H(s)$, en el eje de valores complejos, esto es, parte real nula y parte imaginaria igual a la pulsación analógica de análisis Ω :

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \quad s \in C \quad \Rightarrow \quad H(j\Omega) = \text{TF}\{h(t)\} = H(s) \Big|_{s=j\Omega}$$

También podemos entender que la TL es la generalización de la TF a un plano complejo de variable compleja $s = \sigma + j\Omega$. De igual modo, podemos ver la TF como la particularización de la TL en el eje imaginario, o sea, $s = j\Omega$ (o $\sigma = \text{Re}\{s\} = 0$).

Dado un SLIT analógico con respuesta impulsional $h(t)$ y función de transferencia $H(j\Omega)$, su función de transferencia en el dominio de s se puede expresar (generalmente) en forma de cociente de polinomios de s , es decir:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

Usando la propiedad de derivación de la transformada de Laplace siguiente:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{TL}} X(s) \Rightarrow \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\text{TL}} s^n X(s)$$

el sistema anterior se puede expresar con la ecuación en diferencial siguiente:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

La expresión de la función de transferencia se puede describir a partir de la factorización de las raíces de los polinomios numerador y denominador de $H(s)$, llegando a la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = G \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k^a)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k^a)}$$

donde z_k^a son los ceros de $H(s)$, que anulan la función de transferencia

y p_k^a son los polos de $H(s)$, que hacen infinita la función de transferencia.

La función $H(s)$ se puede descomponer en fracciones simples para hallar la respuesta impulsional $h(t)$ del sistema analógico a partir de transformadas de Laplace conocidas y sencillas. No vamos aquí a repasar los métodos para hallar esta respuesta temporal, pero sí vamos a recordar brevemente las transformadas básicas que permiten entender las **condiciones de estabilidad** de un sistema analógico, puesto que estas condiciones serán requisito de diseño imprescindibles para obtener sistemas discretos útiles. Las siguientes relaciones entre señales y sus respectivas transformadas de Laplace son las asociadas a un polo simple real, así como a un par de polos complejos conjugados, ambos casos habituales que aparecen en las expansiones en fracciones simples para la obtención de la respuesta impulsional de un filtro analógico a partir de su función de transferencia $H(s)$:

1) Caso I. Polo simple real

$$e^{\sigma t} u(t) \xleftrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{s - \sigma}$$

donde $p = \sigma$ es un polo simple real en el plano

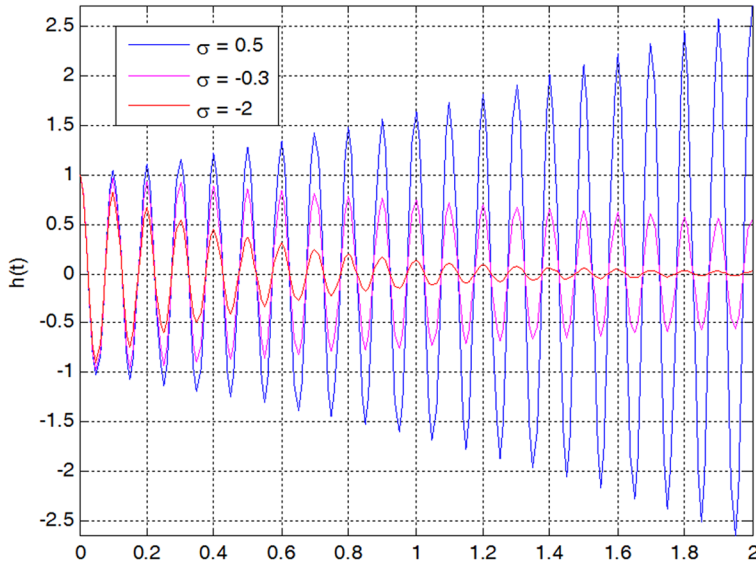
2) Caso II. Par de polos complejos conjugados

$$e^{\sigma t} \cos(\Omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{TL} \frac{s - \sigma}{(s - (\sigma + j\Omega_0))(s - (\sigma - j\Omega_0))} = \frac{s - \operatorname{Re}[p]}{(s - p)(s - p^*)}$$

donde $p = \sigma \pm j\Omega_0$ son polos complejos conjugados en el plano s .

A la vista de los dos ejemplos anteriores, podemos observar que en el caso de que los polos se hallen en el semiplano izquierdo, esto es, la parte real de los polos sea negativa, tendremos respuestas impulsionales que tienden a cero a medida que el tiempo tiende a infinito (ver ejemplos de la figura 23).

Figura 23. Ejemplos de respuestas impulsionales asociadas a un par de polos complejos conjugados de valores $p = \sigma \pm 20\pi$, para diferentes valores de $\operatorname{Re}[p] = \sigma$. Únicamente en el caso en que $\sigma > 0$ se obtiene una respuesta inestable, esto es, que no tiende a 0 a medida que el tiempo aumenta



Si esto se entiende para fracciones simples como estas (polos con multiplicidad unitaria, o no repetidos), lo mismo sucede para fracciones simples más complejas. Por ejemplo, en el caso de que el sistema posea un polo real $s = \sigma$ de multiplicidad 2, aplicando la propiedad de la TL, $t \cdot f(t) \xleftrightarrow{TL} -\frac{dF(s)}{ds}$ podemos llegar a la conclusión de que se cumplirá la relación siguiente:

$$\frac{1}{2} t e^{\sigma t} u(t) \xleftrightarrow{TL} \frac{1}{(s + \sigma)^2}$$

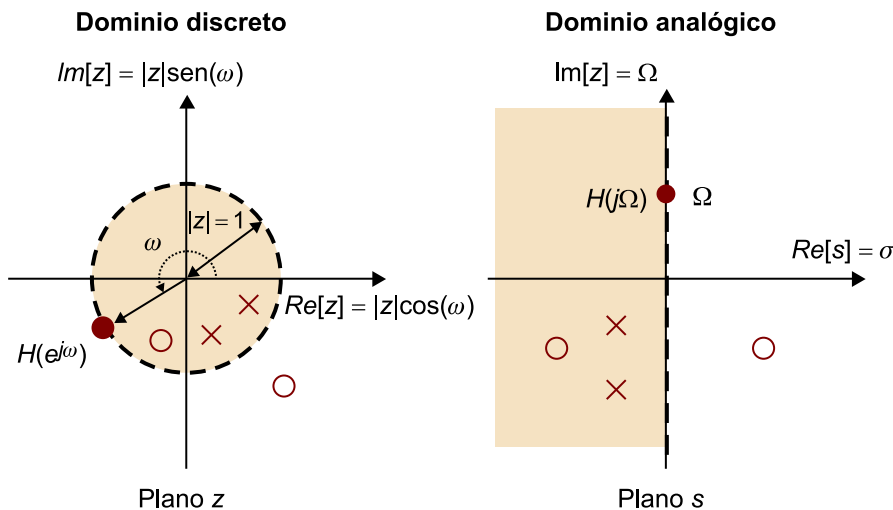
En el caso de que el sistema analógico posea más de un polo, cada uno aportará un término en el cálculo de la respuesta impulsional. Para que esta se corresponda con un sistema estable, cada polo deberá aportar un término que tienda

a 0 con el tiempo. Así pues, la **condición de estabilidad para los sistemas analógicos** es la siguiente: la parte real de todos los polos debe ser negativa, o estos deben hallarse en el semiplano izquierdo del plano complejo s :

$$\operatorname{Re}[p_k^a] < 0 \quad \forall k$$

En la figura 24 se puede apreciar una comparativa de las zonas donde deben situarse los polos, tanto desde la perspectiva del diseño de sistemas discretos con la TZ como en el diseño de sistemas analógicos con la TL. En el primer caso, los polos deben situarse dentro del círculo unidad, mientras que para el segundo caso, estos deben estar en el semiplano izquierdo del plano s .

Figura 24. Representación de las regiones donde deben situarse los polos, tanto en el ámbito del diseño de sistemas de tiempo discreto con la TZ (parte izquierda) como en el ámbito del diseño de los filtros analógicos con la TL (parte derecha)



En el proceso de diseño de filtros analógicos, el posicionamiento de los polos y de los ceros en el momento del diseño debe seguir las siguientes leyes: la parte imaginaria marcará la frecuencia donde se notará su efecto, mientras que la parte real marcará la intensidad de este efecto. Por ejemplo, un par de ceros ubicados en las posiciones $s = \pm j\Omega_0$ cancelará totalmente la pulsación $\Omega = \Omega_0$ rad/s, mientras que si la parte real de ambos polos no es cero, la cancelación no será total y menor será el efecto de reducción de intensidad de la señal cuanto mayor sea el módulo de la parte real de los ceros.

El proceso de diseño de filtros digitales a partir de diseños de filtros analógicos se basa en aprovechar un diseño analógico para convertirlo en un correspondiente diseño digital. En general, podemos resumir los pasos a realizar en los siguientes puntos:

1) Diseñar los polos y ceros del filtro analógico y calcular la función de transferencia y/o su respuesta impulsional:

$$p_k^a, z_k^a \Rightarrow H(s), h(t)$$

2) Convertir el diseño analógico a discreto mediante transformaciones del tipo:

- Obtención de la respuesta impulsional del sistema discreto a partir de la respuesta impulsional del sistema analógico: $h[n] = T\{h(t)\}$.
- Obtención de la función de transferencia del sistema discreto a partir de la función de transferencia del sistema analógico: $H(z) = T\{H(s)\}$.

Dentro de las posibilidades para obtener un diseño de un filtro discreto a partir de un diseño analógico, tenemos las siguientes técnicas:

- Aproximación por derivadas
- Invariancia impulsional (muestreo de la $h(t)$)
- Transformación bilineal
- *Matched Z-transform*

De las posibles técnicas, centraremos el estudio sobre el método de la transformación bilineal, por ser el método más comúnmente aplicado en el proceso de diseño de filtros digitales.

3.2. Transformación bilineal

Las principales ventajas de este método de transformación de un diseño analógico a un filtro discreto, respecto del método basado en la invariancia impulsional, es la posibilidad de realizar el diseño a partir de cualquier tipo de filtro analógico, ya sea un filtro de ancho de banda limitado (paso-bajo, paso-banda) o de ancho de banda ilimitado (paso-alto o rechazo-banda), así como el poder realizar la conversión de forma directa a partir de la función de transferencia en el plano de la transformada de Laplace.

La transformación bilineal se basa en mapear la parte imaginaria de la variable s encima del círculo unidad del plano z . Todos los puntos del semiplano izquierdo de s quedan mapeados dentro del círculo unidad de z (zona de estabilidad para posicionar los polos del sistema), mientras que los puntos de semiplano derecho quedarán fuera del círculo unidad.

A continuación se indica la ecuación de mapeo, que en este caso se aplica de forma directa para obtener el diseño discreto a partir del diseño original analógico:

$$s = f(z) = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad H(z) = H_d(s) \big|_{s=f(z)}$$

Ved también

En el apartado 1) del anexo se puede consultar la técnica de mapeo basada en la invariancia impulsional como extensión al estudio básico. Se puede apreciar que esta técnica, a diferencia del método basado en la transformación bilineal, tiene como principal inconveniente la imposibilidad de conseguir obtener filtros discretos de tipo paso-alto o elimina-banda por tratarse de filtros cuyos equivalentes analógicos son de banda ilimitada.

3.2.1. Estudio del mapeo entre los planos s y z y en los dominios de la frecuencia analógico y discreto

A continuación desarrollamos brevemente la relación del mapeo anterior para investigar sus consecuencias:

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T_s} \left(\frac{r e^{j\omega} - 1}{r e^{j\omega} + 1} \right) = \sigma + j\Omega$$

Desarrollando la parte izquierda de la expresión anterior en parte real y parte imaginaria, se llega a las siguientes igualdades:

$$\sigma = \frac{2}{T_s} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right) \quad \Omega = \frac{2}{T_s} \left(\frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right)$$

Podemos analizar los siguientes casos:

- Si $r < 1 \Rightarrow \sigma < 0$
- Si $r > 1 \Rightarrow \sigma > 0$

Entonces, es cierto que el semiplano izquierdo de s mapea en el interior del círculo de radio 1 en z y viceversa. Ahora estudiamos un caso particular, para investigar mejor el mapeo que existe en el dominio frecuencial:

- Caso $r = 1 \Rightarrow \sigma = 0$ y $\Omega = \frac{2}{T_s} \left(\frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} \right) = \frac{2}{T_s} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$

o de forma equivalente, también:

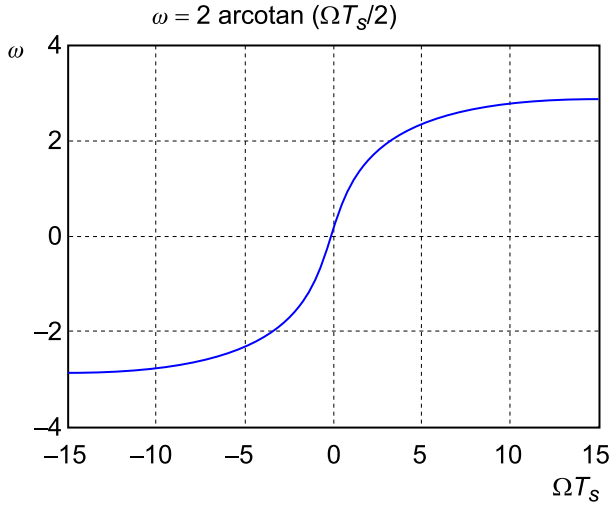
$$\omega = 2 \arctan \left(\frac{T_s \Omega}{2} \right)$$

El mapeo entre las pulsaciones de los ámbitos analógico y discreto es, por lo tanto, un mapeo no lineal que podemos representar (ver figura 25), lo que provoca una compactación de todo el rango de posibles pulsaciones analógicas Ω en el rango de un periodo de la pulsación discreta ω que va de $[-\pi, +\pi]$ (en la figura se observan dos asíntotas horizontales en estos valores de pulsación discreta). Esto permite afirmar que la transformación bilineal, a diferencia del método basado en la invariancia impulsional, no provoca *aliasing* frecuencial, lo que no limita el uso de filtros analógicos de ancho de banda infinito como es el caso de los filtros paso-alto o bien rechazo-banda. Se puede apreciar cómo en este mapeo existe una zona de alta compactación a partir sobre todo de las pulsaciones analógicas $|\Omega| > 3,5/T_s$, mientras que para valores $|\Omega| < 1/T_s$ el mapeo es aproximadamente lineal.

Ved también

Podéis ver la invariancia impulsional en el anexo.

Figura 25. Mapeo no lineal asociado a la transformación bilineal



3.2.2. Elección del parámetro T_s y transformación de especificaciones

El valor del parámetro T_s de la transformación bilineal, a pesar de estar relacionado con una hipotética frecuencia de muestreo, es en realidad un valor que puede ser ajustado de forma directa usando alguno de los métodos siguientes:

1) Usando una relación entre pulsaciones analógica y discreta deseadas. En este caso, sencillamente se escoge el valor de T_s que satisface la relación no lineal del mapeo estudiado, es decir:

$$T_s = \frac{2}{\Omega_0} \tan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

siendo Ω_0 y ω_0 las pulsaciones analógica y discreta que se quiere mapear, respectivamente.

2) Partiendo de las W_R pulsaciones discretas especificadas en los requerimientos del filtro discreto a diseñar ω_i para $i \in [1, \dots, W_R]$, fijamos el parámetro a un valor positivo arbitrario y no nulo (p. ej., $T_s = 1$) a partir del cual obtenemos las pulsaciones analógicas asociadas a los requerimientos de diseño del filtro analógico Ω_i (para $i \in [1, \dots, W_R]$) usando la ecuación de transformación:

$$\Omega_i = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_i}{2}\right) \quad 1 \leq i \leq W_R$$

A este proceso se le llama *frequency prewarping* (que se puede traducir como pre-enroscamiento de frecuencias).

Tanto si se usa uno u otro método, en ambos casos se debe realizar el mapeo de las pulsaciones de corte de las especificaciones (serán pulsaciones asociadas a inicios o finales de bandas de paso o bien de rechazo, en cualquier caso)

usando la anterior ecuación, de forma que una vez realizado el diseño del filtro analógico prototipo, realizando el mapeo asociado a la transformación bilineal se obtendrá el filtro discreto que cumpla con los requisitos de diseño planteados.

Ejemplo

Diseñar un filtro digital paso-bajo con una frecuencia de corte $\omega_c = 0,2\pi$ (a -3 dB de ganancia respecto la ganancia del filtro a $\omega = 0$, que es de 0 dB) a partir de un filtro analógico también paso-bajo con un solo polo.

Partimos de la función de transferencia del filtro analógico (que supuestamente nos la dan):

$$H_d(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

donde Ω_c es la pulsación analógica de corte (de -3 dB s) del filtro analógico.

A partir del mapeo de frecuencias de la transformación bilineal podemos expresar:

$$\Omega_c = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \tan(0,1\pi) = \frac{0,65}{T_s}$$

Por lo tanto, podemos describir la función de transferencia del filtro analógico como sigue:

$$H_d(s) = \frac{0,65/T_s}{s + 0,65/T_s}$$

Aplicamos, a continuación, la transformación bilineal, realizando el correspondiente cambio de variable:

$$H(z) = H_d\left(s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right) = \frac{0,65/T_s}{\frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 0,65/T_s} = \frac{0,245(1+z^{-1})}{1-0,509z^{-1}}$$

Como se puede apreciar, al haber usado la ecuación del mapeo de frecuencias de la transformación bilineal para especificar la frecuencia de corte del filtro analógico a partir de la especificación dada en el dominio discreto, antes de aplicar la ecuación de mapeo en los dominios de s a z , el parámetro T_s desaparece, lo cual indica que su valor es poco relevante (siempre que este no sea cero) para el proceso de diseño en sí.

La función de transferencia en el dominio frecuencial queda:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,245(1+e^{-j\omega})}{1-0,509e^{-j\omega}}$$

Se puede comprobar que cumple:

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$$

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0,2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707,$$

o lo que expresado en dB es $|G(\omega)|_{\omega=0,2\pi} = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})|_{\omega=0,2\pi} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq -3$

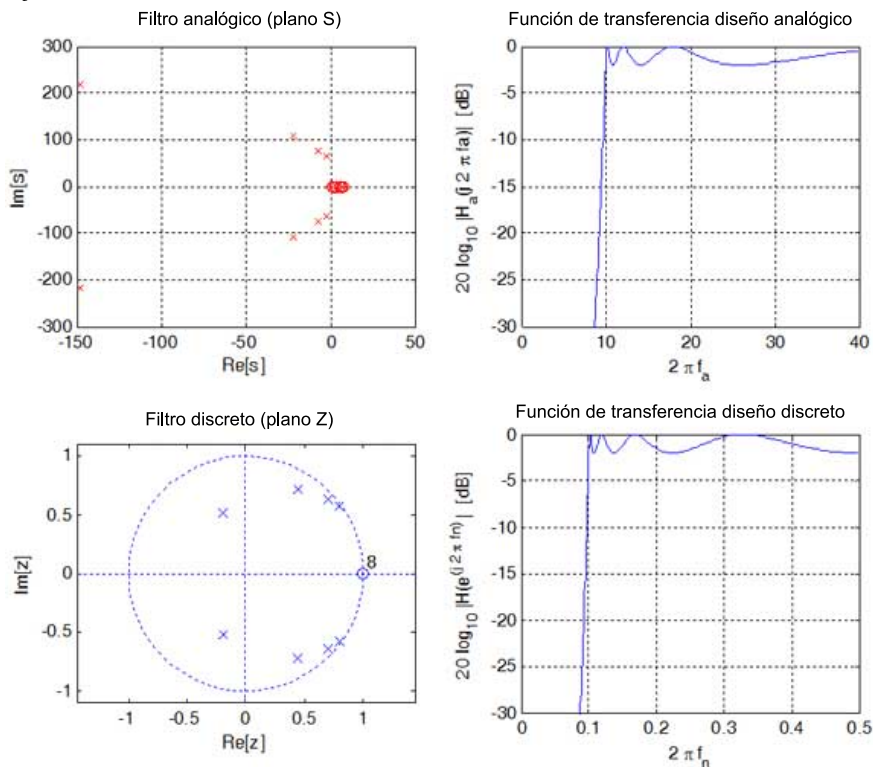
Ejemplo

Diseñar un filtro digital paso-alto de Chebishev tipo I con una pulsación de corte $\omega_c = 0,2\pi$ a partir de un filtro analógico también paso-alto y del mismo tipo pero con una pulsación de corte $\Omega_c = 0,2\pi$ rad/s.

En este segundo ejemplo, veremos únicamente las gráficas de las funciones de transferencia, ya que se trata de filtros aún no estudiados en la teoría. En la figura 26 vemos los diagramas de polos y ceros así como las ganancias en dB de los diseños tanto analógico como el correspondiente diseño discreto final obtenido. Como se puede apreciar, por encima de aproximadamente la frecuencia 10 Hz, el filtro analógico (gráficas de la parte superior de la figura) deja pasar señal con una ganancia que es casi la unidad y con un rizado típico de este tipo de filtros (en este caso de 2dB de amplitud pico a pico, para poder apreciar esta característica de rizado que se da únicamente en la banda de paso). Por otro lado, el diseño discreto (gráficas de la parte inferior de la figura 26) se aprecia cómo el filtro deja pasar las frecuencias normalizadas que se hallan en el intervalo $f_n = \frac{\omega}{2\pi} \in [0,1 \ 0,5]$, tal y como las especificaciones de diseño requerían. Para obtener este diseño, se ha usado la transformación bilineal, usando como parámetro de la transformación el valor siguiente:

$$T_s = \frac{2}{\Omega_c} \tan(\omega_c) = \frac{2}{20\pi} \tan(0,2\pi) = 0,0103$$

Figura 26. Ejemplo de diseño de un filtro paso-alto de Chebishev tipo I usando la transformación bilineal y partiendo de un filtro con orden 8 y pulsación de corte $\Omega_c = 2\pi \times 10$ rad/s



3.3. Filtros analógicos

En este apartado estudiaremos los filtros analógicos más usuales (filtros de Butterworth y filtros de Chebyshev) aunque también existen otros tipos de filtros que permiten obtener diseños de orden menor con las mismas especificaciones, a costa de obtener rizados en ambas bandas (de paso y de rechazo). La ventaja de estos filtros que veremos es que permiten obtener diseños con ambas bandas sin rizados (Butterworth) o bien con una de ellas (Chebyshev tipo I o bien tipo II).

Se estudiará únicamente el diseño de filtros prototipo paso-bajo, y en apartados siguientes se verán las transformaciones frecuenciales que permiten obtener diseños distintos (paso-alto, paso-banda o bien rechazo-banda) a partir de un diseño paso-bajo. Además, se realizará el estudio de filtros con ganancia unitaria en las bandas de paso (o también de 0 dB), de forma que la obtención de un filtro con ganancia diferente se podrá conseguir multiplicando la función de transferencia obtenida por el factor de ganancia deseado.

Según el tipo de filtros estudiado en cada caso, la función de transferencia del filtro $H_d(s)$ se obtiene a partir de la expresión basada en las raíces de su numerador y denominador (polos p_k^a y ceros z_k^a), normalizada para poder expresar la ganancia G deseada en la banda de paso:

$$H(s) = G \frac{\prod_{k=1}^M (1 - s/z_k^a)}{\prod_{k=1}^N (1 - s/p_k^a)} = G' \frac{\prod_{k=1}^M (z_k^a - s)}{\prod_{k=1}^N (p_k^a - s)}$$

siendo el factor de ganancia:

$$G' = G \times \frac{\prod_{k=1}^M p_k^a}{\prod_{k=1}^N z_k^a}$$

Como se puede apreciar, la ganancia de la anterior expresión a la pulsación 0 (o sea, $s = j\Omega = j \times 0 = 0$) es igual a G .

Se estudiarán los filtros de Butterworth y de Chebyshev tipo I, y se dejarán los filtros de Chebyshev tipo II para aspectos de ampliación del estudio.

3.3.1. Filtro de Butterworth

El filtro de Butterworth es un filtro que posee una respuesta frecuencial en módulo monótona decreciente (sin ningún tipo de rizado en ninguna de las bandas), y que se define como un filtro todo-polos. Su definición se da a partir de la respuesta en frecuencia en módulo:

$$|H_d(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}}$$

siendo Ω_c la pulsación de corte a -3dB , Ω_p la pulsación límite de la banda de rechazo, donde la ganancia del filtro en dB es de $-20\log_{10}(1+\varepsilon^2)$, y N el orden del filtro (número de polos). La relación entre estos parámetros se obtiene igualando las expresiones anteriores ($\Omega_p = (\varepsilon)^{\frac{1}{N}}\Omega_c$) y permiten especificar frecuencias de corte distintas a la típica.

Usando la relación siguiente asociada a los filtros con respuesta impulsional real, que tienen respuesta con simetría compleja conjugada en el dominio frecuencial:

$$H_d(s)H_d(-s) \big|_{s=j\Omega} = H_d(j\Omega)H_d(-j\Omega) = |H_d(j\Omega)|^2$$

de forma combinada con la definición anterior, obtenemos:

$$H_d(s)H_d(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2/\Omega_c^2)^N}$$

A partir de la expresión anterior analizamos los polos de $H_d(s)H_d(-s)$ igualando a cero su denominador, hallando raíces complejas, y finalmente asociamos los polos estables (con parte real negativa) a $H_d(s)$ mientras que los inestables (con parte real positiva) a $H_d(-s)$:

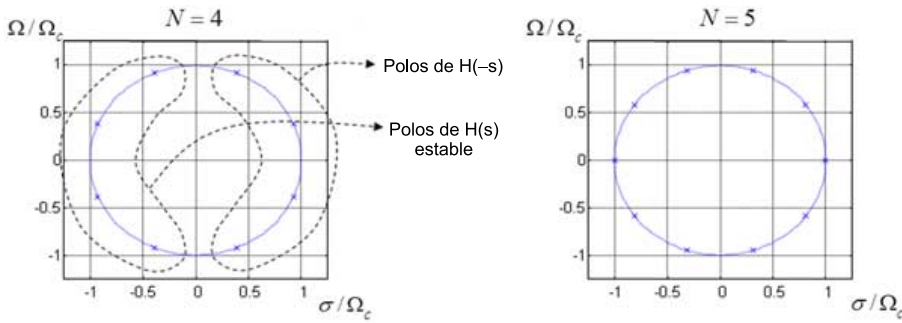
$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\frac{\pi}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$p_k^a = \begin{cases} +\Omega_c e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2N}} & k = 0, 1, \dots, N-1 & \text{(polos inestables de } H_d(-s)) \\ -\Omega_c e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2N}} & k = 0, 1, \dots, N-1 & \text{(polos estables de } H_d(s)) \end{cases}$$

Nota

Aunque en general se denomina pulsación de corte aquella donde el módulo de la función de transferencia decae 3dB por debajo de la ganancia que el filtro tiene en la banda de paso (que delimita la frontera de esta banda), veremos cómo también se definen frecuencias de corte asociadas a ganancias distintas de 3 dB (p. ej., que delimitan las bandas de rechazo).

Figura 27. Ejemplo de diagrama de polos y ceros de un filtro de Butterworth de orden 4 (izquierda) y 5 (derecha)



En la figura 27 se puede apreciar un par de ejemplos de distribución de los polos (cruces en la figura) de un filtro de Butterworth para órdenes 4 y 5, respectivamente, de los cuales únicamente los situados en el semiplano izquierdo son los polos de $H_d(s)$. Se aprecia que en ambos casos la distribución sigue una forma circular de radio igual a la pulsación de corte Ω_c con fases equidistantes π/N rad.

Pendiente de caída del filtro

Dada la ecuación que define la respuesta frecuencial del filtro en módulo, se puede observar que para pulsaciones mucho menores que Ω_c , este se puede aproximar por una ganancia constante e igual a 1. En cambio, para $\Omega \gg \Omega_c$, el módulo se puede aproximar por:

$$|H_d(j\Omega)|^2 \approx \frac{1}{(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

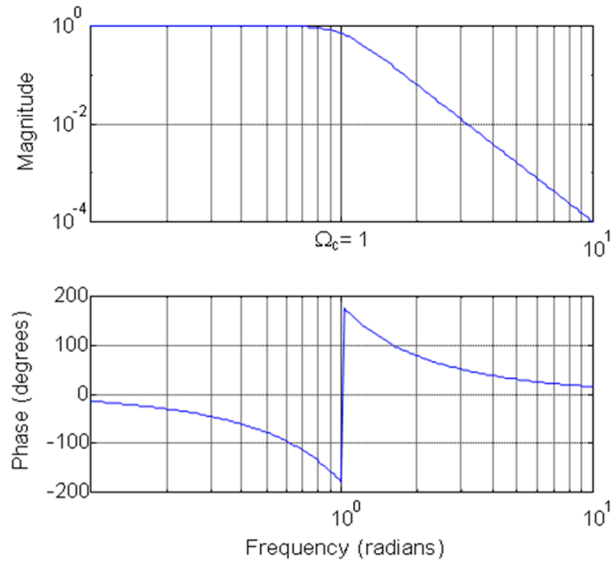
De este modo, si pasamos la ganancia a una representación logarítmica en dB:

$$G_d(\Omega) = 10 \log_{10} |H_d(j\Omega)|^2 \approx 10 \log_{10} \left(\frac{\Omega_c}{\Omega} \right)^{2N} = 20N \log_{10}(\Omega_c) - 20N \log_{10}(\Omega)$$

Es decir, que la representación del módulo del filtro en el dominio frecuencial se puede aproximar por dos asíntotas, una horizontal de valor 1 para $\Omega \ll \Omega_c$, y otra oblicua de pendiente $-20N$ dB por década⁴ para una representación en ejes de frecuencia logarítmicos. En la figura 28 se puede observar un ejemplo de filtro de Butterworth paso-bajo con pulsación de corte $\Omega_c = 1$ rad y de orden $N = 4$. Se puede apreciar que en la representación del módulo (figura superior) en dB y ejes de frecuencia logarítmicos la forma se puede aproximar por dos tramos de recta, tal y como se ha explicado, siendo el segundo tramo con una pendiente de -80 dB por década. Como se puede apreciar, a mayor orden del filtro mayor será también el rechazo que este presenta en la banda de rechazo.

⁽⁴⁾Recordad que una década se corresponde con el intervalo de frecuencias donde la frecuencia final es 10 veces la frecuencia inicial.

Figura 28. Respuesta frecuencial (módulo y fase) de un filtro de Butterworth de orden $N = 4$ y pulsación de corte $\Omega_c = 1$ rad.



Diseño del orden del filtro

Las especificaciones del filtro permiten realizar el correcto dimensionamiento del orden del filtro, esto es, el número de polos que este tiene. El objetivo es, en general, obtener un filtro de mínimo orden que cumpla con los requisitos de diseño, con lo que este será también un diseño de mínima complejidad, lo que después de su traducción al mundo discreto comportará un filtro con la mínima complejidad computacional.

La condición de diseño que permite obtener el orden del filtro se asocia a una máxima ganancia de este $20\log_{10}(\delta_2)$ dB por encima de una determinada pulsación denominada Ω_s y que en general se asocia al límite inferior de la banda de rechazo. Imponiendo esta condición sobre el módulo de la respuesta frecuencial y aplicando la función logaritmo en un determinado paso del desarrollo, llegamos a:

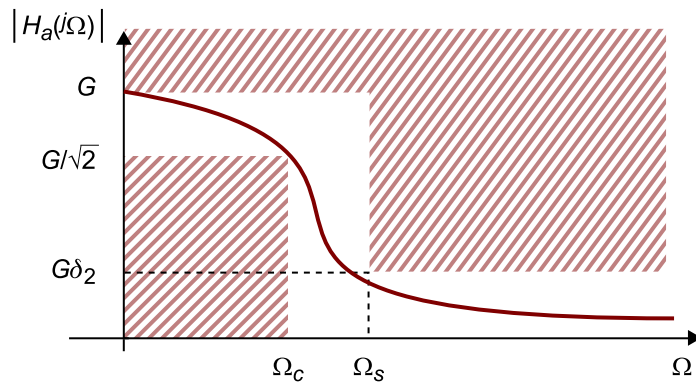
$$\frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\Omega_s / \Omega_p)^{2N}} \leq \delta_2^2$$

$$N \geq \frac{\log[(1/\delta_2^2) - 1]}{2\log[\Omega_s / \Omega_c]} = \frac{\log[\delta / \varepsilon]}{\log[\Omega_s / \Omega_p]}$$

siendo $\delta = \sqrt{1/\delta_2^2 - 1}$ y $\varepsilon = \sqrt{1 - \delta_1^2}$.

Podemos pues ver cómo la anterior ecuación permite calcular el orden mínimo que satisface las especificaciones de diseño, las cuales se expresan gráficamente en la figura 29.

Figura 29. Ejemplo de especificaciones para el diseño del filtro de Butterworth expresadas de forma gráfica. La zona rallada se corresponde con zona de paso prohibido.



En este caso, las especificaciones incorporan la posibilidad de tener una ganancia en la banda de paso distinta de 1 (en lineal, o también 0 dB), de forma que el parámetro G es un parámetro de ganancia que se aplicará una vez se haya diseñado el filtro con ganancia 1. Se puede apreciar cómo la banda de transición ubicada entre las pulsaciones final de la banda de paso (Ω_c) e inicial de la banda de rechazo (Ω_s) marcará el orden del filtro necesario, también claramente dependiente del parámetro de rechazo δ_2 .

Se puede apreciar que a la práctica, la no idealidad de los filtros supone la aceptación de una cierta banda intermedia, denominada banda de transición, donde la ganancia del filtro decae hasta llegar a la condición de rechazo mínimo que permite obtener el orden adecuado de este.

3.3.2. Filtro de Chebyshev tipo I

Los filtros de Chebyshev deben su nombre al matemático Pafnuty Chebyshev, matemático de origen ruso, quien ideó los polinomios de Chebyshev, los cuales son la base de este tipo de filtros. Se diferencian de los filtros de Butterworth por el hecho de que, a diferencia de estos, los filtros de Chebyshev poseen un rizado⁵ de amplitud constante en bandas de paso o bien en las bandas de rechazo. Esta característica hace también que los filtros de Chebyshev no tengan una función de transferencia monótona decreciente, como es el caso de los filtros de Butterworth, y mientras estos son filtros todo-polos, los filtros de Chebyshev (tipo II) también contienen ceros. Sin embargo, una ventaja de los filtros de Chebyshev frente a los filtros de Butterworth es la posibilidad de obtener diseños de orden menor a igualdad de especificaciones de diseño. En este caso, el orden del filtro se define como el máximo número de polos y de ceros.

⁽⁵⁾Se entiende como rizado a la característica de una señal cuando esta oscila en torno a un valor promedio.

El filtro de Chebyshev tipo I se define con una respuesta en frecuencia (en módulo) como sigue:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

siendo Ω_p la pulsación final de la banda de paso en rad/s, ε un parámetro asociado al rizado de la banda de paso, y $T_N(x)$ el polinomio de Chebyshev de orden N definido como sigue:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)) & |x| > 1 \end{cases}$$

Los polinomios de Chebyshev poseen la característica de estar acotados al intervalo $[-1, +1]$ para valores de $x \in [-1, +1]$, mientras que fuera de este intervalo su valor crece o bien decrece de forma progresiva, tal y como se puede apreciar en la figura 30. Como se puede apreciar, cada polinomio posee tantos pasos por cero (o raíces) como orden tiene. Otra característica interesante es que, a pesar de la definición anterior, estos pueden generarse también a partir de una ecuación recursiva como sigue:

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x) \quad N = 1, 2, \dots$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

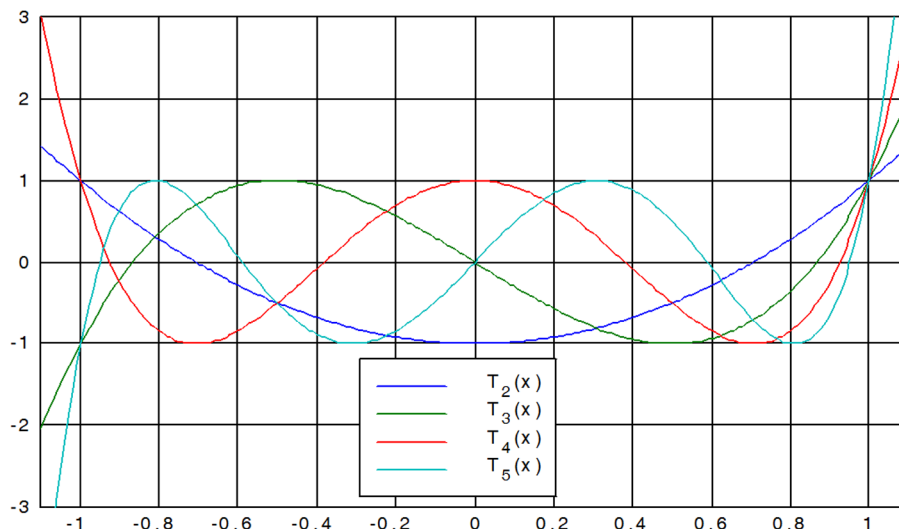
$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \text{etc.}$$

La característica de poseer una cota dentro del intervalo de $x \in [-1, +1]$ permite obtener filtros con rizados constantes dentro de bandas de paso (Chebyshev tipo I), dentro de bandas de rechazo (Chebyshev tipo II) o bien dentro de ambos tipos de bandas (filtros elípticos).

Ved también

Los filtros elípticos no se estudiarán en este módulo.

Figura 30. Polinomios de Chebyshev de órdenes 2 a 5.



Como se puede observar en la expresión del módulo al cuadrado de la función de transferencia del filtro de Chebyshev tipo I de orden N , este posee el polinomio de Chebyshev de orden N en su denominador, de forma que para pulsaciones dentro del intervalo $\Omega \in [-\Omega_p, +\Omega_p]$ la variable del polinomio cumple que $x = \Omega/\Omega_p \in [-1, +1]$. Es decir, que dentro

de la banda de paso, la ganancia del filtro se halla dentro del margen $G(\Omega) = 10 \log_{10} |H_d(j\Omega)|^2 \in [10 \log_{10}(1/(1+\varepsilon^2)), 10 \log_{10} 1] = [10 \log_{10}(1/(1+\varepsilon^2)), 0] \text{ dB}$. El valor mínimo de este intervalo (es un valor negativo) se debe al caso en que el polinomio de Chebyshev tiene un valor igual a +1 o bien -1, mientras que el límite superior al caso en el que el polinomio retorna un valor 0. Al rizado del filtro, expresado como el cociente del valor máximo entre el mínimo de la ganancia en lineal, se le denomina con el parámetro $\delta_1 = \sqrt{1+\varepsilon^2}$. Cuando la pulsación se halla fuera de este intervalo, el polinomio de Chebyshev tiende a valores crecientes o bien decrecientes, de forma que su módulo tiende a infinito. De este modo, la función de transferencia tendrá una tendencia hacia una ganancia muy pequeña, lo que denota una característica propia de la banda de rechazo.

El filtro de Chebyshev tipo I es un filtro también todo-polos, dado que la expresión del módulo de la función de transferencia está formada por un polinomio de Chebyshev en su denominador. Los polos (p_k^a) del filtro se hallan dentro del plano s sobre una elipse de semiejes r_1 y r_2 , cuyos valores se pueden expresar en función de las especificaciones (Ω_p, ε y N):

$$r_1 = \Omega_p \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \quad ; \quad r_2 = \Omega_p \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \quad ; \quad \beta = \left[\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} + 1}{\varepsilon} \right]^{1/N}$$

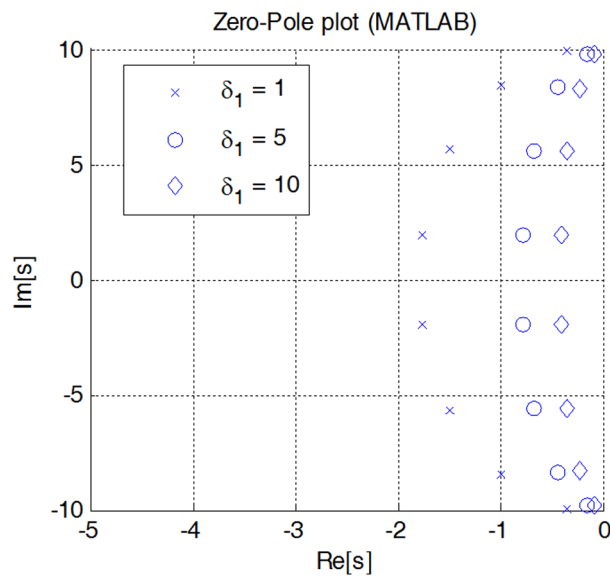
La posición exacta de cada uno de los N polos del filtro sobre el plano s se puede expresar mediante las siguientes expresiones matemáticas:

$$\begin{aligned} p_k^a &= x_k + jy_k \\ x_k &= r_2 \cos \phi_k \\ y_k &= jr_1 \sin \phi_k \end{aligned}$$

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

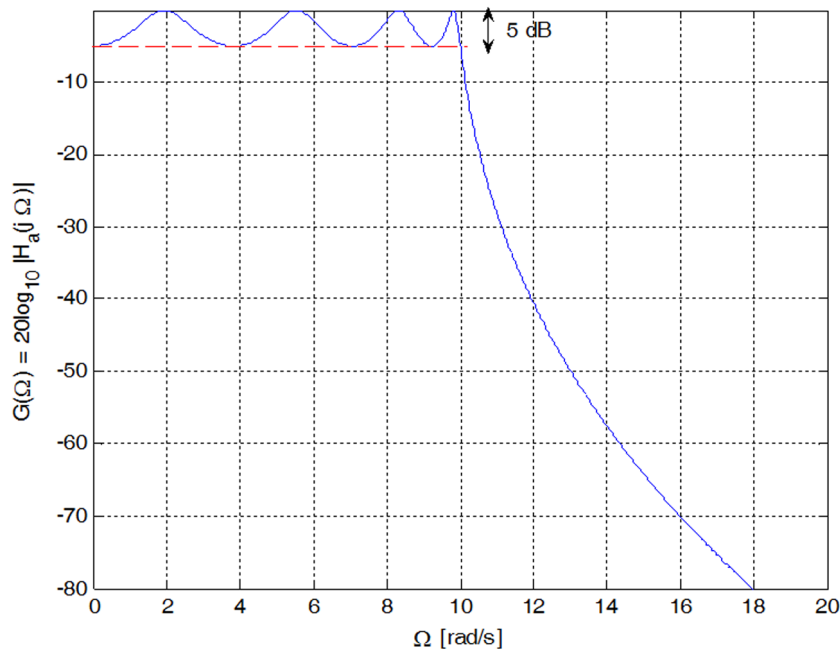
En la figura 31 se puede observar un ejemplo de posicionamiento de los polos del filtro de Chebyshev tipo I para tres valores del parámetro de rizado, y para un mismo orden y frecuencia de corte del filtro. Se puede apreciar cómo los polos se hallan posicionados sobre una elipse cuyos semiejes varían dependiendo del factor de rizado (a mayor rizado, mayor desproporción entre estos ejes).

Figura 31. Ejemplo de posicionamiento de los polos (cruces) para tres filtros de Chebyshev tipo I con parámetros $N=8$; $\Omega_p = 10$ rad/s y rizados δ_1 de 1, 5 y 10 dB



En la figura 32 se puede ver la función de transferencia de un filtro de Chebyshev tipo I con un parámetro de rizado de 5 dB y frecuencia de corte de 10 rad/s. Se aprecia claramente la característica de este tipo de filtros, con rizado de amplitud máxima constante en la banda de paso y decaimiento constante en la banda de rechazo.

Figura 32. Ejemplo de función de transferencia (ganancia en dB) de un filtro de Chebyshev tipo I con parámetros $N=8$; $\Omega_p = 10$ rad/s y rizado en la banda de paso de 5 dB



Diseño del orden del filtro

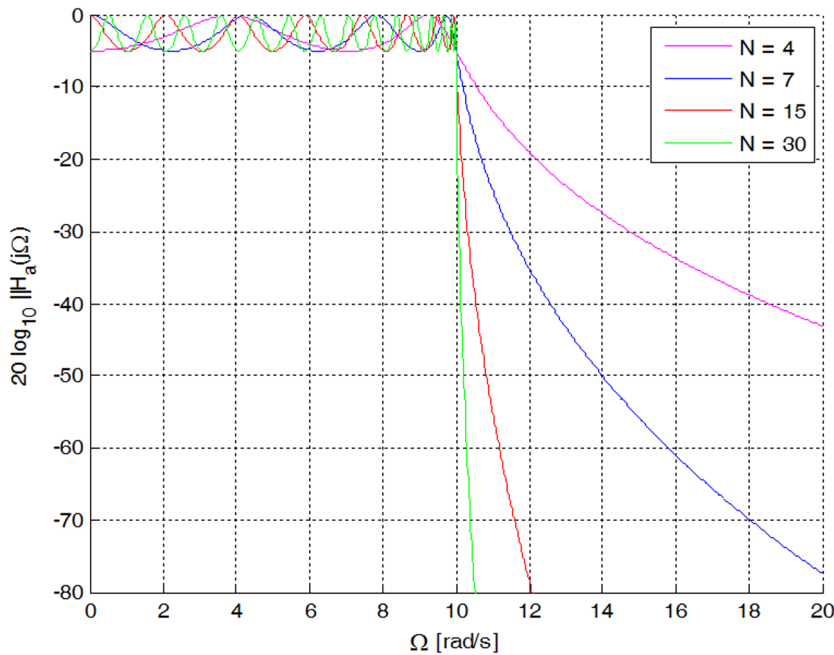
Dado que en el intervalo $\Omega \in [-\Omega_p, +\Omega_p]$ la ganancia del filtro posee la característica de oscilar en torno a los valores de $10\log_{10}(1/(1+\varepsilon^2))$ dB y de 0dB, el parámetro ε es un parámetro asociado al rizado de la ganancia en la banda de paso. Esto permite que las restricciones de diseño permitan su cálculo de forma directa al especificar el rizado máximo deseado en la banda de paso del filtro (máxima variación de la ganancia). Por otro lado, la pulsación de corte Ω_p es una pulsación asociada al final de la banda de paso, pero a diferencia del filtro de Butterworth, en este caso la caída de la ganancia a esta frecuencia no será siempre 3 dB, ya que la ganancia del filtro en este punto dependerá justamente del rizado máximo deseado.

El orden del filtro, sin embargo, influye, tal y como sucedía en el filtro de Butterworth, en la pendiente de caída del filtro más allá de la pulsación límite de la banda de paso (Ω_p). Como se puede apreciar en el ejemplo de la figura 33, el orden del filtro afecta claramente a esta caída de la ganancia aunque también a la frecuencia del rizado en la banda de paso, siendo en este segundo caso un factor menos relevante de cara a su diseño. Por este motivo, el orden del filtro se puede fijar imponiendo la siguiente **condición de rechazo**, tal y como sucedía en el filtro de Butterworth:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)} \leq \delta_2^2 \text{ para } \Omega \geq \Omega_s$$

siendo Ω_s la pulsación que delimita el inicio de la banda de rechazo.

Figura 33. Ejemplos de función de transferencia del un filtro de Chebyshev tipo I con parámetros del filtro $\Omega_p = 10$ rad/s, rizado en la banda de paso de 5 dB y para 4 órdenes diferentes (ver leyenda de la figura)



Usando las expresiones de la definición de los polinomios de Chebyshev para el rango de la variable x donde $|x| > 1$, se puede llegar a la siguiente expresión del orden mínimo del filtro que satisface la condición de rechazo anteriormente expuesta:

$$N \geq \frac{\log\left[\left(\sqrt{1-\delta_2^2} + \sqrt{1-\delta_2^2(1+\varepsilon^2)}\right)/(\varepsilon\delta_2)\right]}{\log\left[(\Omega_s/\Omega_p) + \sqrt{(\Omega_s/\Omega_p)^2 - 1}\right]} = \frac{\cosh^{-1}(\delta/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)}$$

donde $\delta = \sqrt{1/\delta_2^2 - 1}$ y $\delta_1 = \sqrt{1+\varepsilon^2}$.

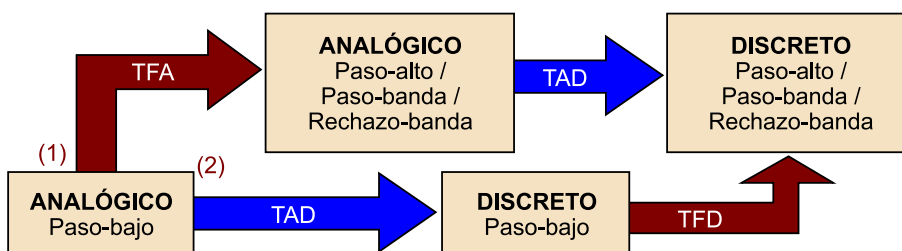
Por ejemplo, a la vista de los ejemplos de la figura 33, se puede apreciar que el filtro de Chebyshev tipo I de orden mínimo con rizado en la banda de paso de 5 dB y pulsación de corte 10 rad/s que tiene una atenuación mínima de 35 dB por encima de la pulsación de 12 rad/s es igual a 7. En este caso las especificaciones de diseño son:

$$\Omega_p = 10 \quad \Omega_s = 12 \quad \delta_1 = 10^{\frac{5}{20}} = 1,7783 \quad \delta_2 = 10^{-\frac{35}{20}} = 0,0178$$

3.4. Transformaciones de frecuencia

Repasados los filtros de Butterworth y de Chebyshev vamos a ver cómo a partir de un filtro analógico paso-bajo podemos obtener un filtro digital que no sea paso-bajo, o sea, paso-alto, paso-banda o bien rechazo-banda. En el caso de que el filtro digital deseado sea paso-bajo es únicamente necesario aplicar la transformación del dominio analógico al dominio discreto (p. ej., transformación bilineal).

Figura 34. Diagrama de bloques asociado a los dos métodos distintos para obtener un filtro digital deseado a partir de un filtro paso-bajo analógico utilizando transformaciones de analógico a discreto (TAD), y transformaciones en frecuencia en el dominio analógico (método (1), TFA) o bien transformaciones en frecuencia en el dominio discreto (método (2), TFD).



En la figura 34 podemos ver representados en forma de diagrama de bloques los dos caminos o métodos posibles que permiten alcanzar el objetivo propuesto. En primer lugar, el camino superior (1) se basa en aplicar al filtro paso-bajo analógico original una transformación en frecuencia en el dominio analógico (TFA) para obtener un filtro analógico distinto (paso-alto, paso-banda o rechazo-banda), para luego aplicar la transformación de analógico a discreto escogida. En segundo lugar, el camino inferior (2) se basa en realizar primero la

conversión de filtro analógico a filtro discreto, para luego aplicar la transformación en frecuencia en el dominio discreto (TFD) que nos permita obtener el diseño deseado.

Cabe señalar que si se escoge el método de transformación de filtros analógicos en filtros digitales basado en la invariancia impulsional, no será posible realizar el proceso de conversión (1) de la figura 34 si el filtro final deseado es un paso-alto o rechazo-banda, dado que este método requiere que el filtro sea un filtro de ancho de banda finito, como se puede ver en el anexo.

3.4.1. Transformaciones en frecuencia en el dominio discreto

Si en lugar de realizar la transformación en frecuencia del filtro en el dominio analógico (con la transformada de Laplace) se realiza esta una vez el filtro ya ha sido transformado al dominio digital (camino (2) de la figura 34), se deben aplicar unas ecuaciones de mapeo que básicamente sustituyen la variable z por una función de esta misma. En este caso, el mapeo se puede escribir como sigue:

$$z^{-1} \rightarrow g(z^{-1})$$

Es decir, la función de transferencia del nuevo filtro será $H(z^{-1}) = H(g(z^{-1}))$, siendo $H(z^{-1})$ la función de transferencia del filtro discreto paso-bajo original.

La función de mapeo debe cumplir las siguientes restricciones para que funcione de forma correcta:

- el mapeo debe hacer corresponder puntos dentro del círculo de radio 1 dentro de sí mismo (condición de estabilidad, para los polos del filtro);
- los puntos sobre el mismo círculo unidad deben llegar también sobre el mismo círculo (correspondencia en frecuencia).

Las funciones de mapeo permiten obtener, a partir de un filtro discreto paso-bajo, un filtro discreto paso-alto, paso-banda o bien rechazo-banda.

Transformación de filtro discreto en frecuencia 1: de LP a LP

La función de transformación de la variable z para la transformación de un filtro discreto paso-bajo con pulsación de corte ω_p a otro filtro discreto paso-bajo con pulsación de corte ω_p' es la siguiente:

$$g(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad a = \frac{\sin[(\omega_p - \omega_p')/2]}{\sin[(\omega_p + \omega_p')/2]}$$

Ved también

Podéis ver el método de transformación de filtros analógicos en filtros digitales basado en la invariancia impulsional en el apartado 1) del anexo.

En el siguiente apartado estudiaremos el método de transformación en frecuencia aplicado directamente sobre el dominio discreto (TFD) y se dejará el método TFA como aspecto de ampliación de conocimientos del apartado 3) del anexo.

Analicemos esta transformación detenidamente, desglosando módulo y fase, para los puntos asociados a la respuesta frecuencial (es decir, para $z = e^{j\omega}$):

$$g(e^{-j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{((\cos(\omega) - a) - j\sin(\omega))}{(1 - a\cos(\omega)) + j\sin(\omega)}$$

$$|g(e^{-j\omega})| = \frac{\sqrt{(\cos(\omega) - a)^2 + \sin^2(\omega)}}{\sqrt{(1 - a\cos(\omega))^2 + a^2\sin^2(\omega)}} = \frac{\sqrt{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}}{\sqrt{1 - 2a\cos^2(\omega) + a^2}} = 1$$

Como se puede apreciar, la función de mapeo propuesta cumple la condición de mapear puntos del círculo unidad en el mismo círculo unidad, lo que se corresponde con la segunda condición (módulo de la función g es igual a la unidad). Para conocer el detalle de cómo se mapea la transformación frecuencia, debemos analizar la fase con más detalle. Teniendo en cuenta que el mapeo es un sencillo cambio de variable, la fase original (o pulsación), ω , será el resultado cambiado de signo de la función de mapeo en función de la fase (o pulsación) del filtro final, ω' , es decir:

$$g(z^{-1}) = g(e^{-j\omega'}) = z^{-1} = e^{-j\omega}$$

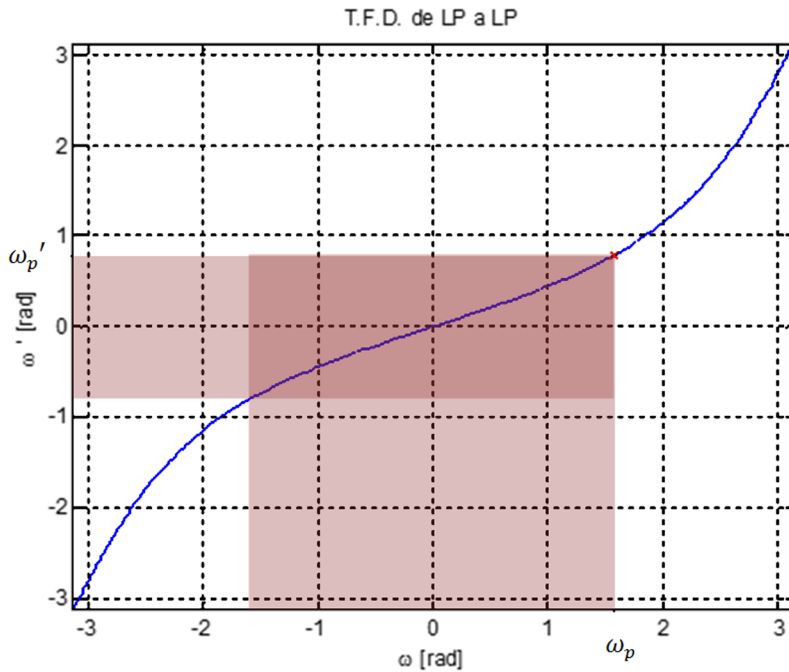
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \omega &= -\text{Arg}\{g(e^{-j\omega'})\} = -\text{Arg}\left\{\frac{e^{-j\omega'} - a}{1 - ae^{-j\omega'}}\right\} = -\text{Arg}\left\{\frac{(e^{-j\omega'} - a)(1 - ae^{+j\omega'})}{(1 - ae^{-j\omega'})(1 - ae^{+j\omega'})}\right\} = \\ &= -\text{Arg}\left\{\frac{(e^{-j\omega'} - a)(1 - ae^{+j\omega'})}{1 + a^2 - 2a\cos(\omega')}\right\} - \text{Arg}\left\{\frac{(-2a + (a^2 + 1)\cos(\omega')) + j(a^2 - 1)\sin(\omega')}{1 + a^2 - 2a\cos(\omega')}\right\} = \\ &= -\text{Arg}\left\{\frac{x + jy}{K}\right\} = \begin{cases} -\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ -(\pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi - \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ (\pi - \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)) & x < 0 \end{cases} = q(\omega) \end{aligned}$$

Debe saber que en el desarrollo se ha tenido en cuenta la resolución de la ambigüedad entre cuadrantes a partir del signo de la parte real, y que $x = -2a + (a^2 + 1)\cos(\omega')$ e $y = (a^2 - 1)\sin(\omega')$.

Si dibujamos la función $\omega' = q(\omega)$, pero invirtiendo los ejes cartesianos para observar ω' en función de ω (ver figura 35), podemos ver cómo la función de mapeo consigue hacer corresponder la frecuencia de corte ω_p original sobre la frecuencia de corte final ω_p' , a través de una expansión de una parte del margen frecuencial (en este ejemplo, dicha expansión se produce en el margen de altas frecuencias, al reducir la frecuencia de corte del filtro, y conseguir así un filtro más selectivo) y una compresión del resto de frecuencias (en este caso, de las bajas frecuencias). Al tratarse de una función monótona creciente, se mapea baja frecuencia en baja frecuencia (alrededor de $\omega = 0$) y alta frecuencia en alta frecuencia (alrededor de $\omega = \pi$).

Figura 35. Mapeo de frecuencias de la TFD del tipo paso-bajo a paso-bajo



En la figura anterior se observa el mapeo de la banda de paso del filtro como una zona sombreada.

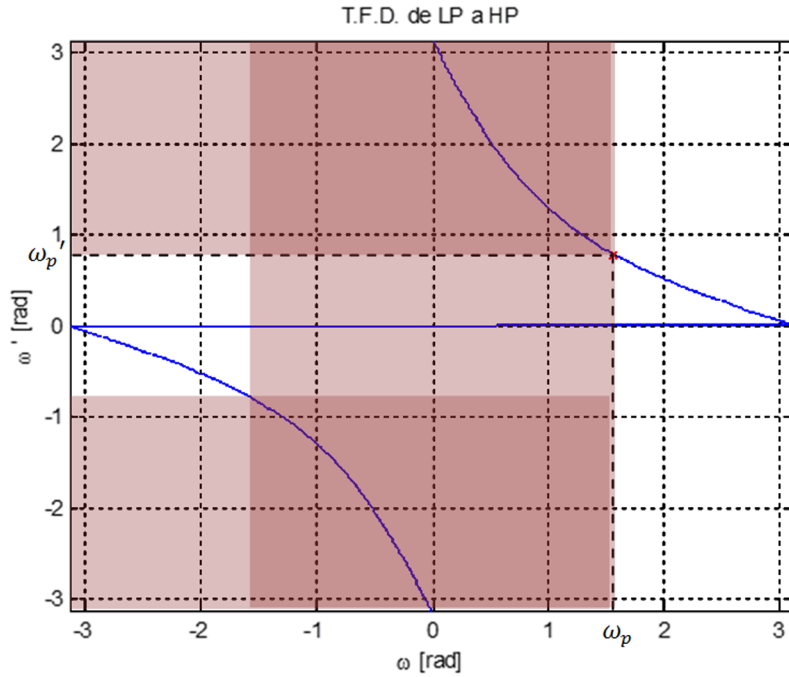
Transformación de filtro discreto en frecuencia 2: de LP a HP

La función de transformación de la variable z para la transformación de un filtro discreto paso-bajo con pulsación de corte ω_p en un filtro discreto paso-alto con pulsación de corte ω_p' es la siguiente:

$$g(z^{-1}) = -\frac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}} \quad a = -\frac{\cos[(\omega_p - \omega_p')/2]}{\cos[(\omega_p + \omega_p')/2]}$$

En vez de realizar el mismo proceso al visto en la conversión de paso-bajo en paso-bajo, solo se muestra la función de mapeo resultante de su aplicación. Como se puede observar en la figura 36, en este caso se trata de una función decreciente, lo que provoca un giro de las bandas de paso, estando estas ubicadas en la alta frecuencia discreta (alrededor de $\omega = \pi$) en lugar de su ubicación original (en $\omega = 0$). La banda de paso (zona sombreada), que originalmente es única en el filtro paso-bajo (intervalo $-\omega_p \leq \omega \leq \omega_p$), queda desdoblada en dos (intervalo $-\pi \leq \omega \leq -\omega_p$ e intervalo $\omega_p \leq \omega \leq +\pi$).

Figura 36. Mapeo de frecuencias de la TFD del tipo paso-bajo a paso-alto



Transformación de filtro discreto en frecuencia 3: de LP a BP

La función de transformación de un filtro discreto paso-bajo con pulsación de corte ω_p en un filtro discreto paso-banda con pulsación de corte inferior ω_l y pulsación de corte superior ω_u es:

$$g(z^{-1}) = -\frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}$$

$$a_1 = -2\alpha K / (K + 1)$$

$$a_2 = (K - 1) / (K + 1)$$

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_l)/2]}$$

$$K = \tan(\omega_p / 2) / \tan((\omega_u - \omega_l) / 2)$$

Transformación de filtro discreto en frecuencia 4: de LP a BS

La función de transformación de un filtro discreto paso-bajo con pulsación de corte ω_p en un filtro discreto rechazo-banda con pulsación de corte inferior ω_l y pulsación de corte superior ω_u :

$$g(z^{-1}) = \frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}$$

$$a_1 = -2\alpha / (K + 1)$$

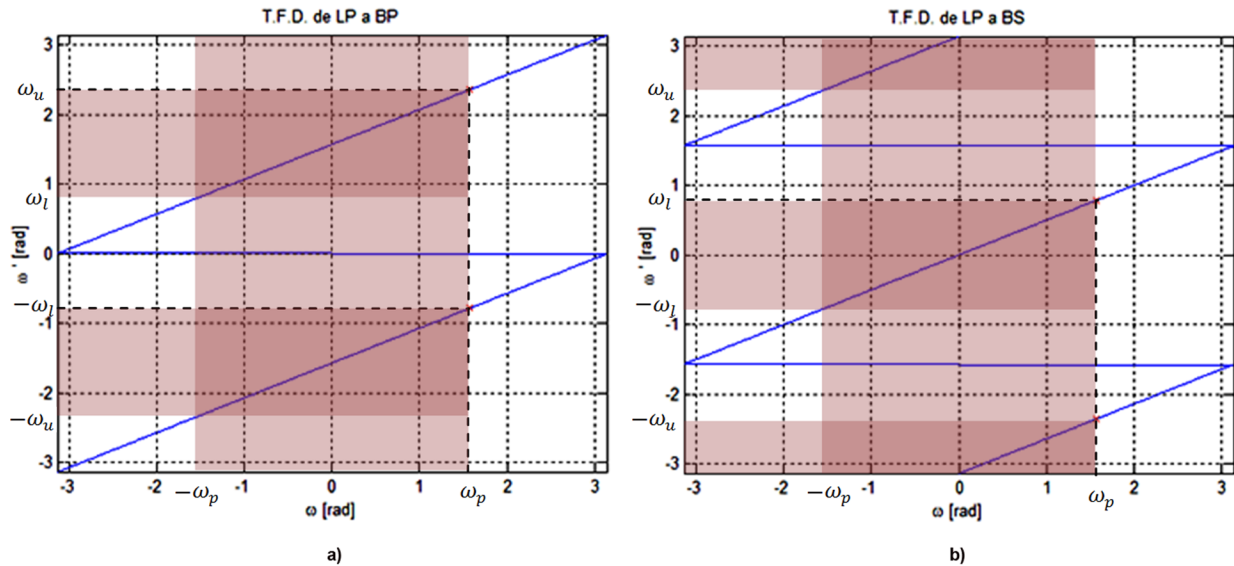
$$a_2 = (1 - K) / (K + 1)$$

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_l + \omega_u)/2]}{\cos[(\omega_l - \omega_u)/2]}$$

$$K = \tan(\omega_p / 2) \cdot \tan((\omega_u - \omega_l) / 2)$$

En la figura 37 se puede observar el tipo de mapeo frecuencias de las transformaciones frecuenciales de prototipos discretos paso-bajo a prototipos paso-banda (a) y rechazo-banda (b). En el primer caso (LP a BP), se puede apreciar que la banda de paso centrada en la baja frecuencia queda desdoblada en dos bandas frecuenciales, una en las frecuencias positivas y otra en las frecuencias negativas. En cambio, en el segundo (LP a BS), la banda de paso se desdobra en tres en el margen que va de $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Figura 37. Mapeo de frecuencias de la TFD del tipo paso-bajo a paso-banda (a) y del tipo paso-bajo a rechazo-banda (b)



Actividades

1) Diseñar un filtro paso-banda con ganancia 0 dB y con frecuencias de corte $\Omega_l = 1000\pi \text{ rad/s}$ y $\Omega_h = 5000\pi \text{ rad/s}$, teniendo en cuenta una frecuencia de muestreo de $f_s = 10 \text{ KHz}$ y utilizando el diseño de Chebyshev de tipo I. El rizado en la banda de paso no debe superar 1 dB. El orden del filtro debe calcularse tal que el prototipo paso-bajo utilizado tenga un ganancia de -22 dB a $\Omega_s = 2\Omega_p$. Escoger durante el diseño (del mismo prototipo paso-bajo) una frecuencia final de la banda de paso de $\Omega_p = 100\pi \text{ rad/s}$. Utilizar la transformación bilineal para pasar de analógico a discreto, y hacer la conversión de prototipo paso-bajo a paso-banda también en el dominio discreto.

Solucionario

1) Para determinar el orden del filtro, empezamos por hallar la constante ε con el rizado en la banda de paso:

$$\delta_1 \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{1/\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right) = 10 \log_{10} (1+\varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon \sqrt{10^{\delta_1 \text{ dB}/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0,5088$$

La atenuación en $\Omega = \Omega_s$ es de:

$$-22 = 20 \log_{10} \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = 10^{-\frac{22}{20}} = 0,0794$$

Teniendo en cuenta los cálculos anteriores y que $\Omega_s = 2\Omega_p$, el orden del filtro es:

$$N = \frac{\log_{10} \left[\left(\sqrt{1-\delta_2^2} + \sqrt{1-\delta_2^2(1+\varepsilon^2)} \right) / (\varepsilon \delta_2) \right]}{\log_{10} \left[(\Omega_s/\Omega_p) + \sqrt{(\Omega_s/\Omega_p)^2 - 1} \right]} = \dots = 2,9599 \Rightarrow N = 3$$

Para calcular los polos, calculamos primero las constantes β , r_1 y r_2 , teniendo en cuenta los cálculos previstos y que $\Omega_p = 100 \text{ } \pi \text{ rad/s}$:

$$\begin{aligned} \beta &= \left[\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{\varepsilon} \right]^{\frac{1}{N}} = \dots = 1,6096 \\ r_1 &= \Omega_p \frac{\beta^2+1}{2\beta} = \dots = 350,4256 \\ r_2 &= \Omega_p \frac{\beta^2-1}{2\beta} = \dots = 155,2483 \end{aligned}$$

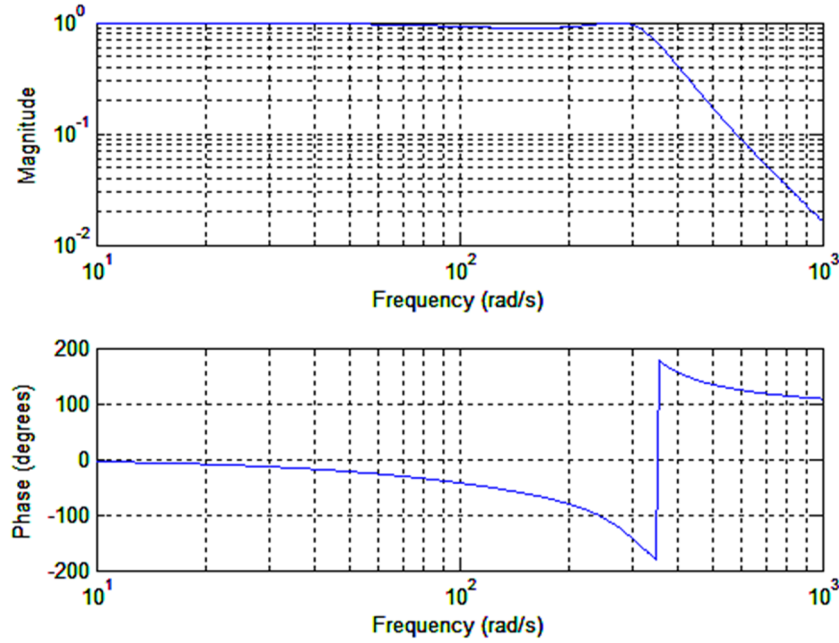
A continuación, determinamos el valor de los 3 polos del filtro analógico paso-bajo:

$$\begin{aligned} p_k &= r_2 \cos \phi_k + j r_1 \sin \phi_k \quad \phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ \Rightarrow p_0 &= 313,25 e^{j1,8212} \quad p_1 = 155,25 e^{j\pi} \quad p_2 = 313,25 e^{-j1,8212} \end{aligned}$$

Por tanto, la función de transferencia del filtro analógico paso-bajo es:

$$\begin{aligned} H_{lp}(s) &= \frac{313,25 \cdot 10^{j1,8212} \cdot 155,25 \cdot 10^{j\pi} \cdot 313,25 \cdot 10^{-j1,8212}}{(313,25 \cdot 10^{j1,8212} - s)(155,25 \cdot 10^{j\pi} - s)(313,25 \cdot 10^{-j1,8212} - s)} = \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7}{1,523 \cdot 10^7 + 1,222 \cdot 10^5 s + 310,5 s^2 + s^3} \end{aligned}$$

En la figura 38, podemos observar la función de transferencia del filtro prototipo paso-bajo analógico de la ecuación anterior, dibujada a partir de la llamada en Matlab a la función *freqs*.

Figura 38. Respuesta en frecuencia del diseño paso-bajo analógico $H_{lp}(s)$ 

A continuación, tenemos que aplicar la transformada bilineal para hallar el prototipo paso-bajo discreto. El valor del parámetro T_s se puede escoger, en este caso, en un valor arbitrario, ya que después de realizar la conversión de filtro analógico a digital se realizará la transformación frecuencial en discreto para convertir el filtro paso-bajo en paso-banda.

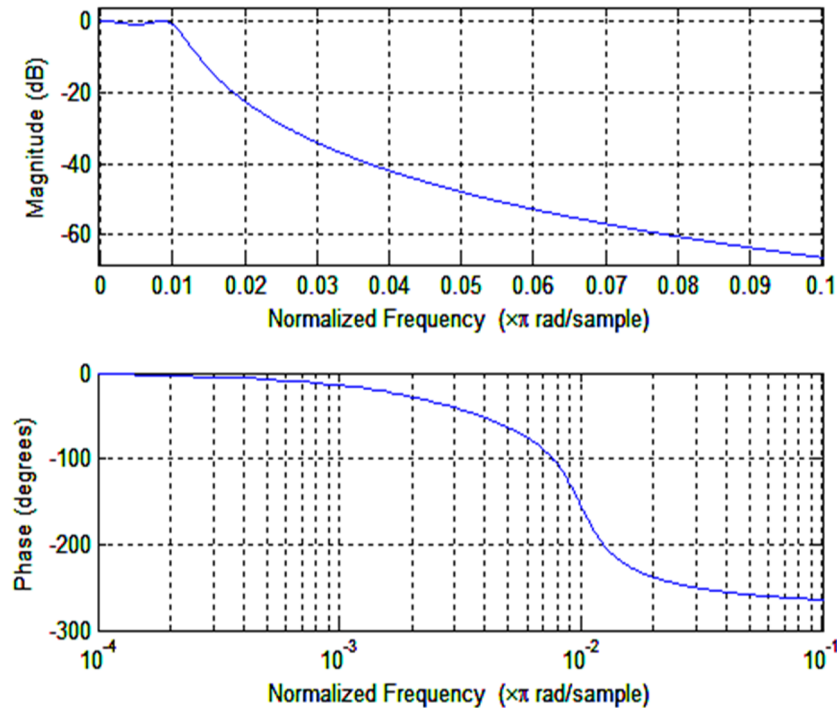
Si escogemos, por ejemplo, $T_s = 1/10.000 = 10^{-4}$, la frecuencia de corte del filtro analógico original de $\Omega_p = 100\pi$ rad/s quedará mapeada en la siguiente frecuencia discreta:

$$\omega_p = 2 \arctan \left[\frac{T_s \cdot \Omega_p}{2} \right] = 2 \arctan \left[\frac{100\pi}{2 \cdot 10.000} \right] = 0,0314 \approx \frac{\pi}{100}$$

La función de transferencia obtenida al aplicar la transformación bilineal es la siguiente:

$$\begin{aligned} H_{lp}(z) &= H_{lp}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} = 20 \cdot 10^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7}{1,523 \cdot 10^7 + 1,222 \cdot 10^5 \left(20 \cdot 10^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right) + 310,5 \left(20 \cdot 10^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right)^2 + \left(20 \cdot 10^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right)^3} = \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7 (1+z^{-1})^3}{1,523 \cdot 10^7 (1+z^{-1})^3 + 2,444 \cdot 10^9 (1-z^{-1})(1+z^{-1})^2 + 1,242 \cdot 10^{11} (1-z^{-1})^2 (1+z^{-1}) + 8 \cdot 10^{12} (1-z^{-1})^3} = \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7 (1+3z^{-1}-4z^{-2}+z^{-3})}{8,1267 \cdot 10^{12} - 2,4122 \cdot 10^{13} z^{-1} + 2,3873 \cdot 10^{13} z^{-2} - 7,8782 \cdot 10^{12} z^{-3}} \end{aligned}$$

En la figura 39, podemos observar la función de transferencia $|H(e^{j\omega})|$ del filtro paso-bajo discreto. Obsérvese que la frecuencia final de la banda de paso ahora es $\omega_p = 2 \arctan(\Omega_p T_s / 2) = 2 \arctan(100\pi / 20.000) \simeq \pi / 100$ (véase cómo en la figura 39, que ha sido dibujada con la función *freqz* de Matlab, el eje de frecuencia está normalizado de modo que 1 coincide con la frecuencia de Nyquist $\omega = \pi$ rad).

Figura 39. Respuesta en frecuencia del filtro discreto paso-bajo $H_p(z)$ 

Finalmente, nos queda realizar la transformación frecuencial de prototipo paso-bajo a paso-banda mediante la siguiente función de transformación:

$$z^{-1} \rightarrow g(z^{-1}) = -\frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}$$

Antes de nada, hay que calcular las frecuencias de corte del filtro paso-banda discreto, utilizando la normalización con la frecuencia de muestreo:

$$\omega_u = \Omega_u / f_s = 5.000\pi / 10.000 = \pi/2 \quad \omega_l = \Omega_l / f_s = 1.000\pi / 10.000 = \pi/10$$

Calculamos las constantes a_1 y a_2 de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_l)/2]} = \frac{\cos[(\pi/2 + \pi/10)/2]}{\cos[(\pi/2 - \pi/10)/2]} = 0,7265$$

$$K = \tan(\omega_p/2) / \tan[(\omega_u - \omega_l)/2] = \tan(\pi/200) / \tan[(\pi/2 - \pi/10)/2] = 0,0216$$

$$a_1 = -2\alpha K/(K+1) = \dots = -0,0308 \quad a_2 = (K-1)/(K+1) = -0,9577$$

Ahora ya podemos calcular el filtro discreto paso-banda final, aplicando la correspondiente transformación de paso-bajo a paso-banda en el dominio discreto:

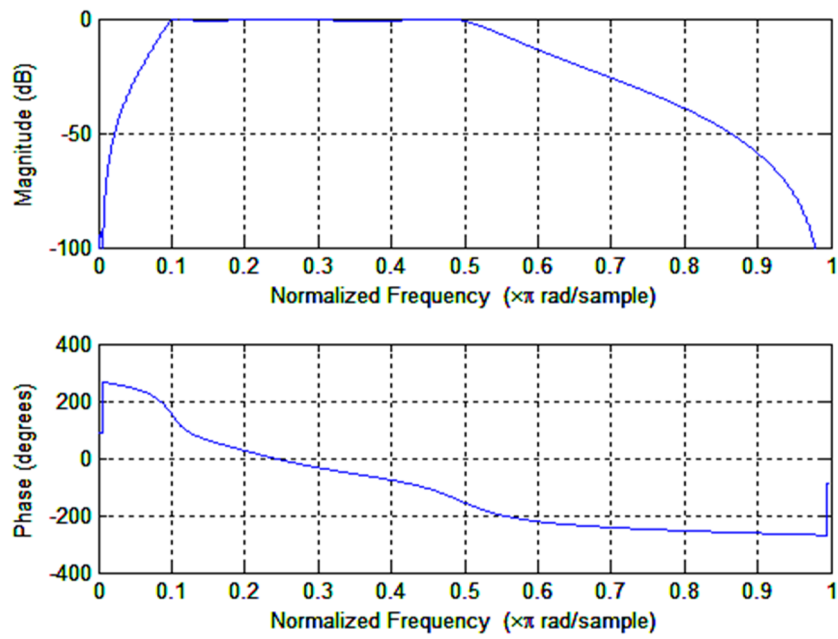
$$H_{bp}(z) = H_{lp}\left(z^{-1} = \frac{z^{-2} + 0,0308z^{-1} - 0,9577}{-0,9577z^{-2} + 0,0308z^{-1} + 1}\right) =$$

$$= \frac{1,523 \cdot 10^7 (1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{8,1267 \cdot 10^{12} z^{-2} - 2,4122 \cdot 10^{13} z^{-1} + 2,3873 \cdot 10^{13} z^{-2} - 7,8782 \cdot 10^{12} z^{-3}} \Bigg|_{z^{-1} = \frac{z^{-2} + 0,0308z^{-1} - 0,9577}{-0,9577z^{-2} + 0,0308z^{-1} + 1}} =$$

$$= \dots = \frac{1,463 - 4,389z^{-2} + 4,389z^{-4} - 1,463z^{-6}}{19,882 - 57,439z^{-1} + 80,383z^{-2} - 76,791z^{-3} + 54,459z^{-4} - 25,027z^{-5} + 58,035z^{-6}} =$$

$$= \frac{0,0736 - 0,2207z^{-2} + 0,2207z^{-4} - 0,0736z^{-6}}{1 - 2,889z^{-1} + 4,0429z^{-2} - 3,8622z^{-3} + 2,7391z^{-4} - 1,2587z^{-5} + 0,2919z^{-6}}$$

En la figura 40 podemos ver el resultado del diseño en el dominio frecuencial. Se puede observar cómo la banda de paso se encuentra dentro del margen $\pi/10 \leq \omega \leq \pi/2$. Se le deja al alumno la implementación física del filtro discreto diseñado a partir de la expresión final.

Figura 40. Respuesta en frecuencia del filtro discreto paso-banda diseñado final $H_{bp}(z)$ 

Abreviaturas

FIR Sigla de *finite impulse response filter*, ‘filtro de respuesta impulsional finita’

IIR Sigla de *infinite impulse response filter*, ‘filtro de respuesta impulsional infinita’

ROC Sigla de *region of convergence*, ‘región de convergencia’

SLIT Sigla de *sistema lineal e invariante en el tiempo*

TZ Transformada Z

Anexo

En este anexo se tratan algunas extensiones de la explicación básica del tema de diseño de filtros discretos que pueden ser útiles para ampliar conocimientos.

1) Método de mapeo basado en la invariancia impulsional

El objetivo principal de esta técnica es el diseño de un filtro IIR que tenga como respuesta impulsional la versión muestreada uniformemente, en tiempos múltiples del periodo de muestreo T_s , de la respuesta impulsional del filtro analógico prototipo del que se parte, es decir, que se cumpla la siguiente ecuación:

$$h[n] = h(t = nT_s)$$

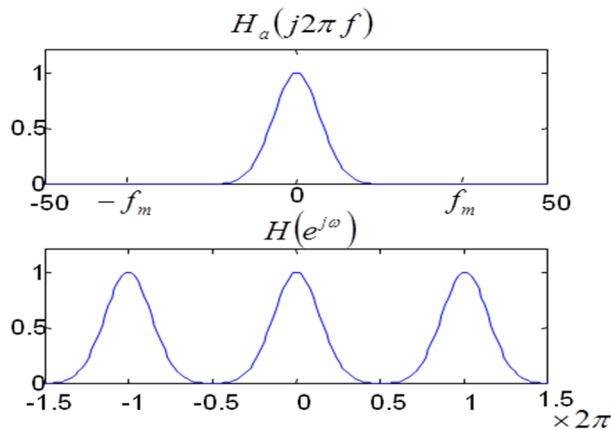
Para investigar las implicaciones y consecuencias de la anterior relación hay que recordar la relación entre las representaciones frecuenciales de ambas señales analógica y discreta. Recordemos que el muestreo de señales analógicas en el tiempo implica la aparición de periodicidades en el dominio de Fourier, de forma que la TFSD de la correspondiente secuencia discreta es igual a la repetición de la TF de la señal analógica, $H_a(j\Omega)$, a múltiplos de la pulsación de muestreo, multiplicada en amplitud por el factor $1/T_s$

$$\begin{aligned} h(t) &\xleftrightarrow{\text{TF}} H_a(j\Omega) \\ h[n] &\xleftrightarrow{\text{TFSD}} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left[j\frac{(\omega - 2\pi k)}{T_s}\right] \end{aligned}$$

En el ejemplo de la figura 41 se puede apreciar la relación en el dominio frecuencial, especialmente en lo que se refiere al eje de frecuencias.

Dado que la relación se establece como un muestreo en el dominio temporal, uno de los fenómenos que puede producirse en el dominio frecuencial es el *aliasing* o solapamiento de componentes frecuenciales de la señal analógica original en la señal muestreada. Este fenómeno se producirá siempre que no se cumpla la relación $f_s = 1/T_s > 2BW$, siendo BW el ancho de banda del filtro analógico original. Es pues lógico observar cómo esta condición únicamente puede ser mantenida cuando se parte de diseños de filtros analógicos de ancho de banda finito, esto es, filtros de tipo paso-bajo o bien paso-banda, mientras que no se cumplirá para filtros paso-alto o rechazo-banda.

Figura 41. Ejemplo de filtro analógico paso-bajo y la correspondiente versión de filtro paso-bajo discreto obtenido a partir del muestreo en tiempo de la respuesta impulsional



Estudio del mapeo entre los planos s y z y en los dominios de la frecuencia analógico y discreto

Antes de nada empecemos por recopilar las relaciones que nos permiten llegar a entender mejor cómo podemos interpretar el muestreo de la respuesta impulsional desde el punto de vista de un mapeo entre los planos analógico (en el dominio de la variable s) y discreto (en el dominio de la variable z).

$$\begin{aligned} h(t) &\overset{\text{TL}}{\longleftrightarrow} H_{as}(s) & h(t) &\overset{\text{TF}}{\longleftrightarrow} H_a(\Omega) \\ h[n] &\overset{\text{TZ}}{\longleftrightarrow} H(z) & h[n] &\overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\ H_a(j\Omega) &= H_a(s) \Big|_{s=j\Omega} \end{aligned}$$

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT_s}} = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=-jsT_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_d \left[s - j(2\pi / T_s) k \right]$$

$$h[n] \overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_d \left[j(\omega / T_s - (2\pi / T_s) k) \right]$$

Vemos cómo podemos llegar a relacionar las funciones de transferencia de los sistemas analógico y discreto a partir de una sencilla relación entre las variables s y z :

$$z = e^{sT_m} \quad \Rightarrow \quad re^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)T_m} = e^{\sigma T_m} e^{j\Omega T_m}$$

Por lo tanto, módulo y fase de la variable z se pueden poner en relación a las partes real e imaginaria de la variable s , respectivamente:

$$r = e^{\sigma T_m} \quad \omega = \Omega T_m$$

Llegado a este punto podemos analizar dos aspectos del mapeo entre los planos s y z :

- El semiplano izquierdo de s queda mapeado dentro de la circunferencia de radio 1 en z , y el eje imaginario de s justo sobre la circunferencia:

$$\sigma < 0 \Rightarrow 0 < r < 1 \quad ; \quad \sigma > 0 \Rightarrow 1 < r \quad ; \quad \sigma = 0 \Rightarrow r = 1$$

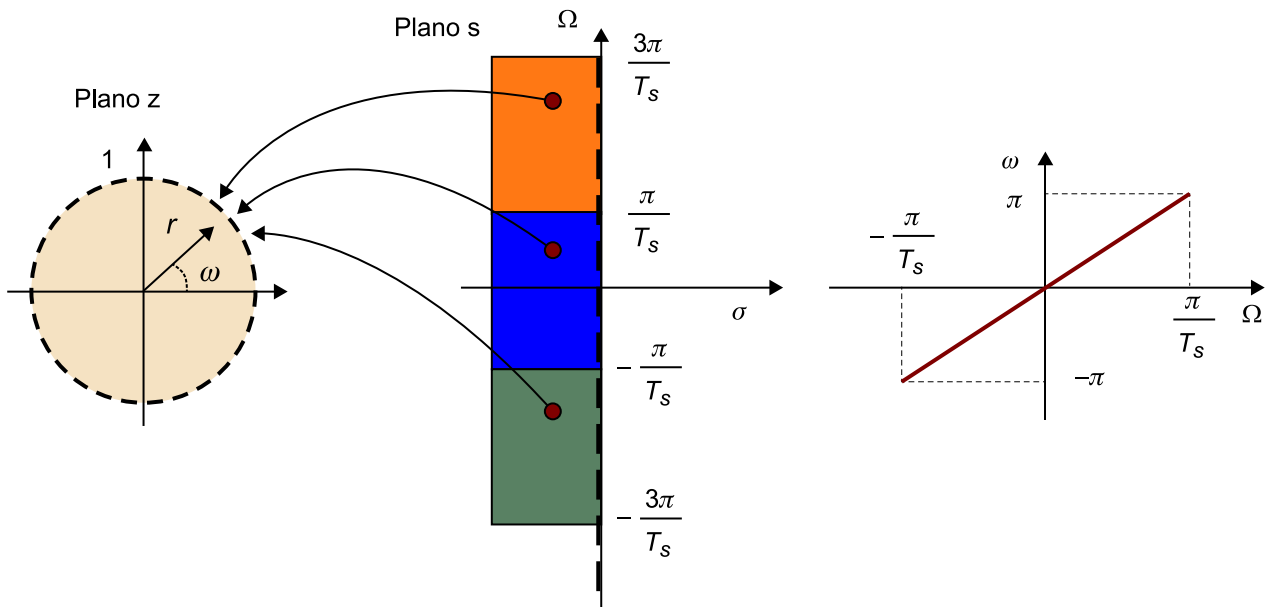
Esta relación nos permite afirmar que la transformación basada en la invariancia impulsional permite obtener filtros discretos estables cuando partimos de un diseño de filtro analógico estable.

- El mapeo anterior es del tipo *many-to-one* o no biyectivo, dado que Ω se refiere al eje imaginario de s , y en cambio ω hace referencia a la fase de z lo que implica una periodicidad implícita. Esto implica que habrá muchas posibles pulsaciones analógicas que queden mapeadas sobre una única pulsación discreta, aspecto asociado a la periodicidad del dominio espectral discreto al realizar el muestreo temporal (ver la parte izquierda de la figura 42):

$$re^{j\omega} = e^{\sigma T_s} e^{j\Omega T_s} = e^{\sigma T_s} e^{j\left(\Omega + \frac{2\pi}{T_s}k\right)T_s} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Concretamente, todos los puntos del plano s cuyas pulsaciones estén separadas múltiplos de $2\pi/T_s$ quedarán mapeadas en la misma posición del plano z .

Figura 42. Izquierda: mapeo *many-to-one* asociado a la relación entre las funciones de transferencia de los sistemas analógico y discreto de la transformación basada en la invariancia impulsional. Derecha: mapeo de frecuencias lineal dentro del ancho de banda en el que no se produce *aliasing*



Es interesante remarcar que, como contrapartida al problema del solapamiento de frecuencias que provoca el mapeo *many-to-one*, el mapeo entre frecuencias de los dominios analógico (Ω) y discreto (ω) es un mapeo lineal ($\omega = \Omega T_s$),

lo que garantiza que en la variable de frecuencia se mantendrán las características del filtro original dentro del ancho de banda en el que no se produce *aliasing* alguno (ver la parte derecha de la figura 42).

No hay que perder de vista que la relación entre las variables s y z analizadas explica parte de la relación completa entre las funciones de transferencia del sistema analógico de partida y del sistema discreto final diseñado. Como se ha visto en las ecuaciones del inicio de este apartado, la invariancia impulsional expresa que la transformada Z es igual a la extensión periódica de la transformada de Laplace a múltiplos $2\pi/T_s$ en el eje imaginario, más el cambio de variable analizado. Esta relación compleja solo permite entender las limitaciones que el mapeo frecuencial permite obtener, pero queda lejos de permitir realizar la conversión de un diseño analógico en un filtro discreto de forma directa a partir de la función de transferencia en el dominio de la transformada de Laplace.

Ejemplo

Analicemos un filtro analógico todo-polos con N secciones de un solo polo en paralelo:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k^a} \Rightarrow h(t) = \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k^a t} \right) u(t)$$

Si se muestrea la respuesta impulsional a tiempos $t = nT_s$, obtenemos la siguiente secuencia:

$$h[n] = h(nT_s) = \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k^a nT_s} \right) u[n]$$

Calculamos su transformada Z :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k^a nT_s} \right) z^{-n} = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{p_k^a T_s} z^{-1} \right)^n$$

La condición de convergencia para obtener series sumables es:

$$|e^{p_k^a T_s} z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |e^{p_k^a T_s}| = |e^{(\sigma_k + j\Omega_k)T_s}| = e^{\sigma_k T_s}$$

y dado que el filtro analógico es estable:

$$\sigma_k < 0 \Rightarrow e^{\sigma_k T_s} < 1 \Rightarrow \text{los polos se hallarán dentro del círculo unidad.}$$

Acabamos de calcular la TZ:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{p_k^a T_s} z^{-1} \right)^n = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k^a T_s} z^{-1}}$$

Como se puede observar, el filtro discreto posee polos en $p_k = e^{p_k^a T_m}$, lo que equivale al mapeo estudiado $z = e^{sT_m}$, aunque esto no implique que, en general, se pueda efectuar un simple cambio de variable, tal y como se comentó anteriormente.

2) Filtro de Chebyshev tipo II

Los filtros de Chebyshev tipo II se diferencian de los de tipo I en que estos poseen un rizado constante en la banda de rechazo, mientras que en la banda de paso poseen una ganancia monótona decreciente, justo al revés que los de tipo I. Para conseguir este efecto, la definición de del módulo al cuadrado de la función de transferencia se basa en una inversión tanto en el eje de frecuencias como en el de amplitudes del polinomio de Chebyshev, quedando la siguiente ecuación:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\Omega_s/\Omega_p) / T_N^2(\Omega_s/\Omega)]}$$

siendo Ω_p la pulsación límite de la banda de paso, ε un parámetro asociado a la ganancia en esta pulsación límite, Ω_s la pulsación límite de la banda de rechazo y $T_N(x)$ el polinomio de Chebyshev de orden N .

Como podemos ver en la ecuación anterior, para $\Omega \geq \Omega_s$ tenemos que $x = \Omega_s/\Omega \leq 1$, siendo además su valor positivo (mayor que 0), con lo que estamos evaluando $T_N(x)$ en la zona donde su amplitud está acotada al intervalo $[-1, +1]$. Dado que en este caso estamos dentro de la banda de rechazo, la ganancia del filtro expresada en lineal estará acotada por los valores 0 (cuando $T_N(x) = 0$) y $\delta_2 = 1/(1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega_s/\Omega_p))$, lo que denotará un rizado de amplitud constante dentro de esta banda.

En cambio, para $\Omega \leq \Omega_s$ tenemos que $1 \leq x = \Omega_s/\Omega$, con lo que estamos evaluando $T_N(x)$ en la zona donde su amplitud crece o bien decrece de forma constante. Este crecimiento en módulo provoca que el término $\varepsilon^2 T_N^2(\Omega_s/\Omega_p) / T_N^2(\Omega_s/\Omega)$ vaya decreciendo de forma paulatina pero constante a medida que nos alejamos de la frecuencia Ω_s y nos acercamos a 0, de modo que la ganancia del filtro tenderá a la ganancia 1. Se puede observar también como para $\Omega = \Omega_p$ la ganancia del filtro es igual a $1/(1 + \varepsilon^2)$, de modo que Ω_p se llama pulsación de corte para una atenuación de $10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2)$ dB.

El filtro de Chebyshev tipo II es un filtro con polos y ceros (p_k^a y z_k^a , respectivamente), los cuales se pueden calcular a partir de las siguientes expresiones matemáticas que dependen de las especificaciones (Ω_p , ε , N y δ_2):

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}$$

$$\begin{aligned} x_k &= r_2 \cos \phi_k & r_2 &= \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \\ y_k &= jr_1 \sin \phi_k & r_1 &= \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \end{aligned}$$

$$\beta = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \delta_2^2}}{\delta_2} \right]^{1/N}$$

$$z_k^a = j \frac{\Omega_s}{\sin \phi_k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$p_k^a = \frac{\Omega_s}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} (x_k + jy_k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

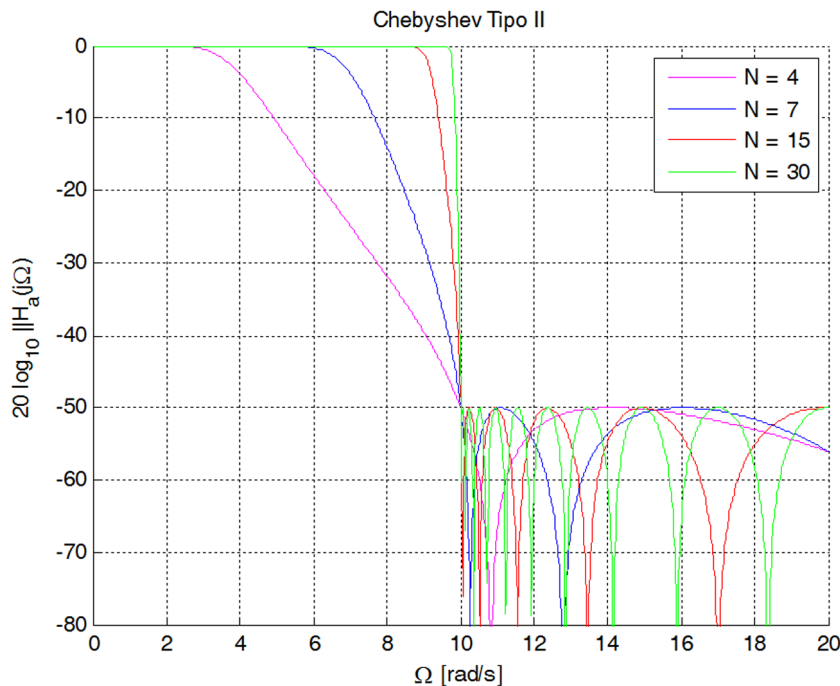
Diseño del orden del filtro

En el caso del filtro de Chebyshev tipo II, el diseño del orden mínimo del filtro se puede realizar con la misma ecuación expresada para el filtro de Chebyshev tipo I. Únicamente hay que tener la precaución de interpretar los parámetros de las especificaciones de acorde con las características particulares de este tipo de filtro, que son:

- El parámetro $\delta_1 = \sqrt{1 + \epsilon^2}$ ahora está asociado a una ganancia a la frecuencia límite de la banda de paso Ω_p , no existiendo ningún tipo de rizado en la banda de paso.
- El parámetro δ_2 es ahora el valor de ganancia máximo asociado al rizado constante que el filtro tiene por encima de la pulsación Ω_s , dentro de la banda de rechazo.

En la figura 43 se pueden ver ganancias para varios órdenes de un filtro de Chebyshev tipo II con pulsación límite de la banda de rechazo $\Omega_s = 10$ rad/s, rizado de la banda de rechazo de -50 dB. Como se puede apreciar, el orden del filtro afecta igualmente a la pendiente del filtro (a mayor orden, mayor pendiente, igual que pasa en los otros filtros estudiados). Además, se puede observar cómo la característica de rizado constante en la banda de rechazo se caracteriza por una oscilación donde los picos son más redondeados que los valles, al ser estos ceros absolutos de la función de transferencia.

Figura 43. Ejemplos de función de transferencia de un filtro de Chebyshev tipo II con parámetros del filtro $\Omega_s = 10$ rad/s, rizado en la banda de rechazo de -50 dB y para 4 órdenes diferentes (ver leyenda de la figura)



Podemos apreciar que la condición de rizado se cumple de forma estricta en la banda de rechazo, mientras que el orden permite cumplir una condición (desigualdad) para la ganancia máxima del filtro por encima de la pulsación límite de la banda de paso. Esto se producía en el filtro de Chebyshev tipo I, pero de forma inversa: mientras que la condición de rizado se cumplía de forma estricta en la banda de paso, el orden del filtro permitía cumplir una condición de ganancia máxima por encima de la pulsación límite de la banda de rechazo.

Por ejemplo, si se analiza el orden mínimo que cumple con los requisitos anteriores, y además se impone que la ganancia del filtro sea como máximo de -15 dB por encima de la pulsación $\Omega_p = 8$ rad/s, se obtienen las especificaciones de diseño siguientes:

$\Omega_p = 8$ $\Omega_s = 10$ $\delta_1 = 10^{\frac{15}{20}} = 5,6234$ $\delta_2 = 10^{-\frac{50}{20}} = 0,0032$ obteniendo un orden mínimo de $N = 7$, y la ganancia del filtro que se puede observar en la figura 43.

3) Transformaciones en frecuencia en el dominio analógico

A partir de los prototipos paso-bajo se pueden conseguir filtros paso-bajo con diferentes frecuencias de corte, filtros paso-alto, filtros paso-banda o filtros rechazo-banda siguiendo una ley de transformación de la variable compleja

s . La metodología se basa en definir dicha transformación de la variable, que únicamente es una transformación lineal cuando se trata de convertir un filtro paso-bajo en otro filtro paso-bajo con diferente frecuencia de corte.

En general, el proceso de transformación en frecuencia se define a partir de una función de mapeo que transforma la variable s :

$$s \rightarrow T(s)$$

$$H_i(s) \rightarrow H_f(s) = H_i(T(s))$$

de modo que $H_i(s)$ es la función de transferencia del filtro original y $H_f(s)$ es la función de transferencia del filtro obtenido después de aplicar la función de mapeo $T(s)$.

Todas las transformaciones de paso-bajo a paso-alto, paso-banda o rechazo-banda son no lineales, lo que puede producir una cierta distorsión (muy pequeña) y que afecta principalmente al escalado de la frecuencia.

Una propiedad interesante es que la transformación aplicada únicamente realiza un mapeo del eje de la frecuencia. Esto significa que los filtros de rizado constante (bien sea en la banda de paso o en la banda de rechazo) siguen teniendo rizado constante pero en las correspondientes bandas transformadas según sea la transformación en frecuencia aplicada. También las atenuaciones mínimas en las bandas de rechazo se mantienen a los mismos niveles, pero dentro de las nuevas bandas de rechazo.

Como se verá, todas las transformaciones en frecuencia se definen a partir de las pulsaciones de corte del filtro original y del filtro deseado. Además, la función de mapeo debe cumplir unos requisitos para poder funcionar de forma correcta: que mapee los puntos del eje imaginario de s sobre el mismo eje (correspondencia de frecuencia) y que los puntos situados en el semiplano izquierdo del plano s queden ubicados en el mismo semiplano (condición de estabilidad, para los polos del sistema).

A continuación vamos a ver con detalle cada tipo de transformación y cómo a partir del mapeo de la variable compleja s podemos deducir la correspondencia de mapeo de la variable frecuencia.

Paso-bajo a paso-bajo

Empezamos nuestro análisis con la transformación más sencilla (al ser esta lineal), que permite obtener un filtro analógico paso-bajo con pulsación de corte Ω_p' a partir de un filtro analógico paso-bajo con pulsación de corte Ω_p . La función de mapeo es la siguiente:

$$s \rightarrow T(s) = \frac{\Omega_p}{\Omega_p'} s$$

La función de transferencia del filtro paso-bajo final se puede obtener sustituyendo la función anterior en la variable s del filtro paso-bajo original, según:

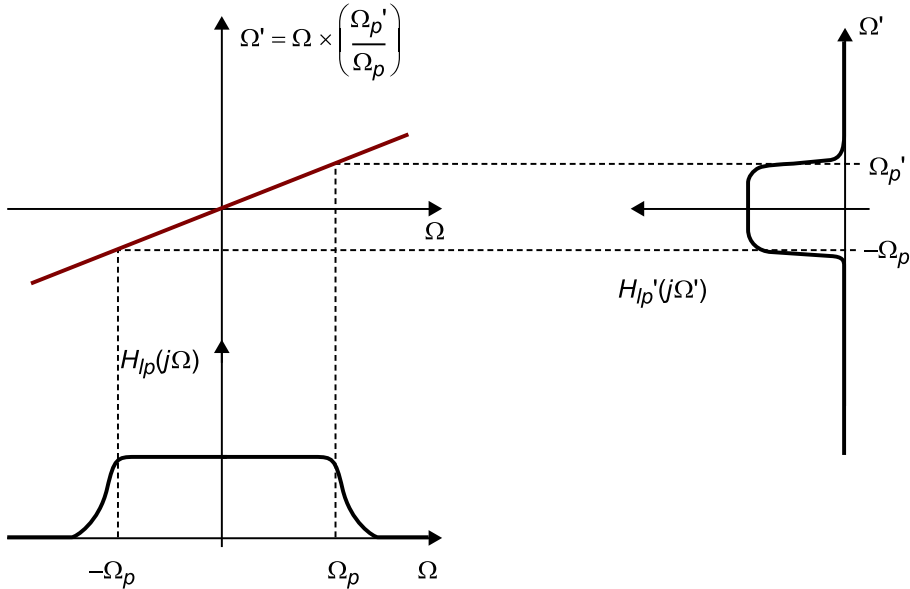
$$H_{lp}(s) \rightarrow H_{lp}'(s) = H_{lp}\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_p'} s\right)$$

Si se sustituye $s = j\Omega$ en la función de mapeo anterior, se llega a la función que hace corresponder la pulsación nueva con los valores de la pulsación del filtro original:

$$\begin{aligned} s = j\Omega = T(s) = T(j\Omega) &= \frac{\Omega_p}{\Omega_p'} j\Omega' \\ \Rightarrow \Omega' &= \left(\frac{\Omega_p'}{\Omega_p}\right) \Omega \end{aligned}$$

En la figura 44 se representa la función de transformación de frecuencia junto con los módulos de la función de transferencia de los filtros original y final. Se puede observar que al ser un mapeo lineal este produce un ensanchamiento (si $\Omega_p' > \Omega_p$) o bien una contracción (si $\Omega_p' < \Omega_p$) de dicho módulo en el eje de frecuencia.

Figura 44. Transformación en frecuencia en el dominio analógico de paso-bajo a paso-bajo



Paso-bajo a paso-alto

Seguimos con la transformación que permite obtener un filtro analógico paso-alto con pulsación de corte Ω_p' a partir de un filtro analógico paso-bajo con pulsación de corte Ω_p . En este caso la función de mapeo de la variable s sigue una ley inversa como:

$$s \rightarrow T(s) = \frac{\Omega_p \Omega_p'}{s}$$

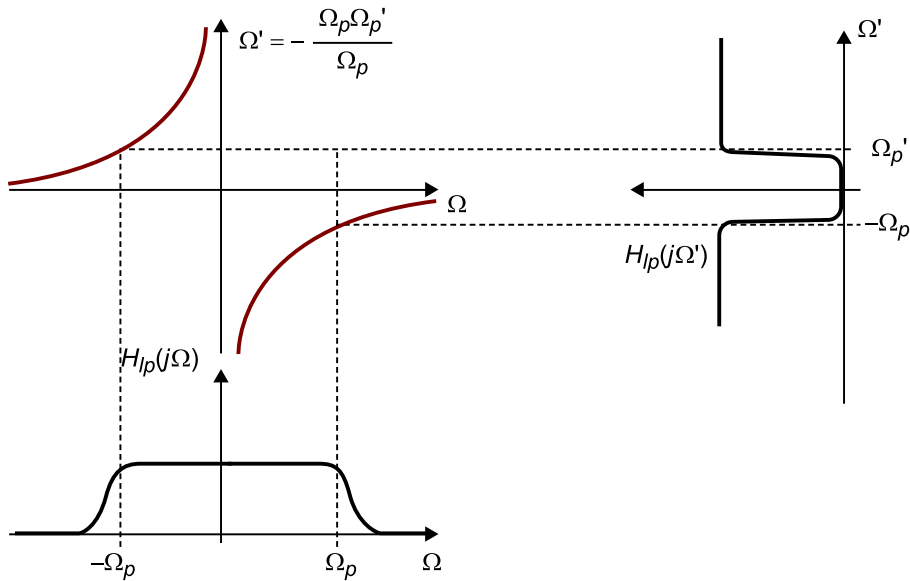
$$H_{lp}(s) \rightarrow H_{hp}(s) = H_{lp}\left(\frac{\Omega_p \Omega_p'}{s}\right)$$

Un análisis de dicho mapeo sobre el eje de la frecuencia nos lleva a concluir que se produce un mapeo inverso como:

$$\begin{aligned} s = j\Omega = T(s) = T(j\Omega) &= \frac{\Omega_p \Omega_p'}{j\Omega} \\ \Rightarrow \Omega' &= -\frac{\Omega_p \Omega_p'}{\Omega} \end{aligned}$$

En la figura 45 se puede ver que la función de transformación en frecuencia de la conversión paso-bajo a paso-alto posee una asíntota vertical y otra horizontal que tiende a infinito y a cero por los dos extremos, lo que permite expandir una banda de paso finita (entre $-\Omega_p$ y Ω_p) en dos bandas de paso infinitas (entre $-\infty$ y $-\Omega_p'$, y entre Ω_p' y $+\infty$).

Figura 45. Transformación en frecuencia en el dominio analógico de paso-bajo a paso-alto



Paso-bajo a paso-banda

Pasamos a estudiar la transformación en frecuencia para convertir un filtro analógico paso-bajo con pulsación de corte Ω_p en un filtro analógico paso-banda con pulsación de corte inferior Ω_l y pulsación de corte superior Ω_u . La función de mapeo asociada y la función de transferencia del filtro paso-banda en función de la función de transferencia del filtro paso-bajo son las siguientes:

$$s \rightarrow T(s) = \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$$

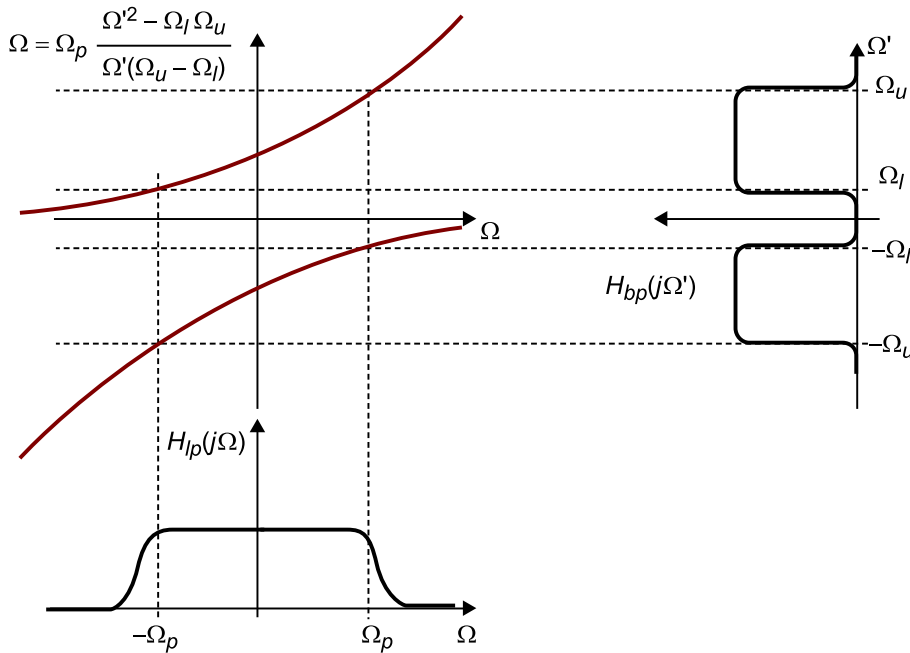
$$H_{lp}(s) \rightarrow H_{bp}(s) = H_{lp}\left(\Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}\right)$$

Sustituyendo $s = j\Omega$ en la función de mapeo anterior se llega a la función que hace corresponder la pulsación nueva con los valores de la pulsación del filtro original:

$$\begin{aligned} s = j\Omega = T(s) = T(j\Omega') &= \Omega_p \frac{-\Omega'^2 + \Omega_l \Omega_u}{j\Omega'(\Omega_u - \Omega_l)} \\ \Rightarrow \Omega &= \Omega_p \frac{\Omega'^2 - \Omega_l \Omega_u}{\Omega'(\Omega_u - \Omega_l)} \end{aligned}$$

La representación de la anterior función de transformación en frecuencia se puede ver en la figura 46. En este caso se puede apreciar cómo, en realidad, es la variable Ω' la que queda representada en función de la variable Ω , con lo que las dos bandas de paso del filtro paso-banda final (una en las frecuencias positivas y la otra en las negativas) se obtienen a partir de un desdoblamiento de la banda de paso del filtro paso-bajo original. Es decir, la función de transformación en frecuencia hace corresponder la pulsación final (Ω') como una función de mapeo de la pulsación original (Ω).

Figura 46. Transformación en frecuencia en el dominio analógico de paso-bajo a paso-banda



Paso-bajo a rechazo-banda

Finalmente, la función de mapeo y la relación entre las funciones de transferencia original y final, que permite diseñar un filtro analógico rechazo-banda con pulsación de corte inferior Ω_l y pulsación de corte superior Ω_u a partir de un filtro analógico paso-bajo con pulsación de corte Ω_p , son las siguientes:

$$s \rightarrow T(s) = \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}$$

$$H_{lp}(s) \rightarrow H_{bs}(s) = H_{lp}\left(\Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}\right)$$

Si se realiza el estudio de la función de transformación en frecuencia para esta función de mapeo, se llega a:

$$s = j\Omega = T(s) = T(j\Omega') = \Omega_p \frac{j\Omega'(\Omega_u - \Omega_l)}{-\Omega'^2 + \Omega_l \Omega_u}$$

$$\Rightarrow \Omega = \Omega_p \frac{\Omega'(\Omega_u - \Omega_l)}{\Omega_l \Omega_u - \Omega'^2}$$

En la figura 47 se puede observar cómo en este caso la transformación permite desdoblar la banda de paso del filtro paso-bajo original en tres bandas de paso para el filtro rechazo-banda: una de baja frecuencia y dos de alta frecuencia (positiva y negativa).

Figura 47. Transformación en frecuencia en el dominio analógico de paso-bajo a rechazo banda

